معـــارف

I - الشكل الجبري

1. تعريف

a، b عددان حقيقيان ، i العدد المركب حيث $i^2 = -1$.

الكتابة $z = a + ib$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z.

- a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z و يرمز له $\mathcal{R}e(z)$ و نكتب $a = \mathcal{R}e(z)$.
- b يسمى الجزء التخيلي للعدد z و يرمز له $\mathcal{I}m(z)$ و نكتب $b = \mathcal{I}m(z)$.
- عندما $b = 0$ يكون z حقيقيا. و عندما $a = 0$ و $b \neq 0$ يكون $z = ib$ و يسمى z عددا تخيليا صرفا.
- يرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$.

• التمثيل الهندسي لعدد مركب

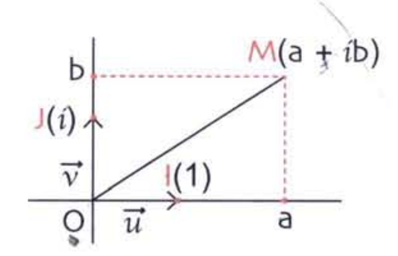
ملاحظة : في كل ما يلي المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

يرفق بكل عدد مركب z حيث $z = a + ib$ النقطة M ذات الإحداثيين $(a ; b)$.

z يسمى لاحقة النقطة M في $\mathbb{C}$.

M تسمى صورة العدد المركب z في المستوي

و يرمز لذلك $M(z)$.



حالات خاصة
- صورة العدد 1 هي النقطة $I(1 ; 0)$ و نكتب $I(1)$.
- محور الفواصل يمثل مجموعة الاعداد الحقيقية.
- صورة العدد i هي النقطة $J(0 ; 1)$ و نكتب $J(i)$.
- محور التراتيب يمثل مجموعة الأعداد التخيلية الصرفة.

• الحساب في مجموعة الأعداد المركبة

قواعد الجمع و الضرب في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تطبق كما هي في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ مع اعتبار $i^2 = -1$. و على الخصوص :

1. الفرق $z' - z$ هو المجموع $z' + (-z)$.
2. مقلوب عدد مركب غير منعدم $z = a + ib$ هو $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib}$ حيث $\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$
3. $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ ؛ $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.
4. z عدد مركب حيث $z = a + ib$. $z = 0$ إذا و فقط إذا كان $a = 0$ و $b = 0$.
5. $z = z'$ يعني $\mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(z')$ و $\mathcal{I}m(z) = \mathcal{I}m(z')$.
6. z ، z' عددان مركبان حيث $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$

$z = z'$ إذا و فقط إذا كان $a = a'$ و $b = b'$.

• الأعداد المركبة و الاشعة - لاحقة مرجح

يرفق بكل شعاع $\vec{u}(x\,;\,y)$ العدد المركب $z = x + iy$. يسمى z لاحقة الشعاع $\vec{u}$.

2. خواص

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان لاحقتاهما z ، z' على الترتيب، λ عدد حقيقي.

- لاحقة الشعاع $\vec{u} + \vec{v}$ هي $z + z'$.
- لاحقة الشعاع $\lambda\,\vec{u}$ هي $\lambda\,z$.
- A ، B ، C نقط لواحقها z_A ، z_B ، z_C على الترتيب.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A$.

لاحقة المرجح G للنقط A ، B ، C المرفقة بالمعاملات α ، β ، γ على الترتيب حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

هي z_G حيث $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$.

II - مرافق عدد مركب

1. تعريف

مرافق العدد المركب z حيث $z = a + ib$. هو العدد المركب الذي يرمز له $\bar{z}$ حيث $\bar{z} = a - ib$.

• التمثيل الهندسي

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$.

النقطة $M'(\bar{z})$ هي نظيرة النقطة $M(z)$ بالنسبة إلى محور الفواصل.

نتائج

1. $\bar{\bar{z}} = z$.
2. إذا كان $z = a + ib$ فإن $z\bar{z} = a^2 + b^2$
3. $z + \bar{z} = 2\mathcal{Re}(z)$ و $z - \bar{z} = 2i\,\mathcal{Im}(z)$
4. z حقيقي يعني $z = \bar{z}$
5. z تخيلي صرف يعني $z = -\bar{z}$

2. خواص

من أجل كل عددين مركبين z و z' و من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم،

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.
- $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ حيث $\bar{z} \neq 0$
- z حقيقي يعني $z = \bar{z}$
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

III - طويلة عدد مركب

1. تعريف

طويلة العدد المركب z حيث $z = a + ib$ هو العدد الحقيقي الموجب الذي يرمز له $|z|$
و المعرف كما يلي : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

• التفسير الهندسي

z عدد مركب ؛ $z = a + ib$ ؛ M صورة z في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. لاحقة $\overrightarrow{OM}$ هي z.

لدينا $\|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

إذن $OM = |z|$



نتائج.

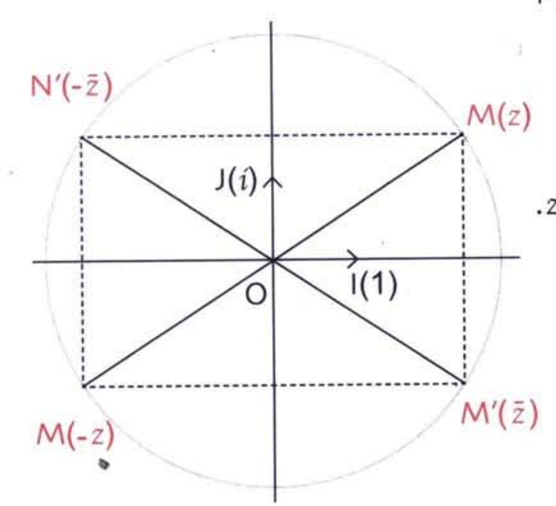
1 • $|z|^2 = z\,\bar{z} = a^2 + b^2$.

2 • من أجل كل عدد مركب z، $|z| = 0$ يعني $z = 0$.

3 • $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$

4 • أ) • $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ $(z \neq 0)$

ب) • إذا كان $|z| = 1$ فإن $\frac{1}{z} = \bar{z}$



2. خواص

من أجل كل عددين مركبين z و $\bar{z}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم،

• $|z\,z'| = |z|.|z'|$

• $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ حيث $z' \neq 0$.

• $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

• $|z^n| = |z|^n$

IV - عمدة عدد مركب

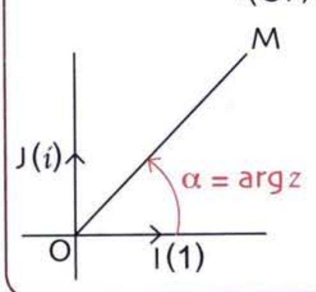
1. تعريف

z عدد مركب غير منعدم صورته النقطة M في المستوي المنسوب إلى معلم $(O ; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

• نسمي عمدة z و نرمز لها $\arg z$ كل قيس (بالراديان) للزاوية $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

• لكل عدد مركب غير منعدم ما لانهاية من العمدات. فإذا كان θ إحداها
نكتب $\arg z = \theta + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

• إذا كان α عددا من بين الأعداد $\theta + k2\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$
نكتب $\arg z = \alpha$.



ملاحظات

- العدد 0 ليس له عمدة لأن صورته هي مبدأ المعلم.
- z عدد حقيقي موجب تماما يعني $\arg z = k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.
- z عدد حقيقي سالب تماما يعني $\arg z = \pi + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.
- z عدد تخيلي صرف يعني $\arg z = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ أو $\arg z = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.
- إذا كان $\arg z = \theta + k2\pi$ فإن $\arg \bar{z} = -\theta + k2\pi$.
- إذا كان $\arg z = \theta + k2\pi$ فإن $\arg (-z) = \theta + \pi + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.
- إذا كان $M(z) \neq M'(z')$ فإن $\arg (z' - z) = (\overrightarrow{OI} , \overrightarrow{MM'}) + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

2. خواص :

من أجل كل عددين مركبين z و z' و من أجل كل عدد صحيح n غير منعدم ؛

- $\arg z . z' = \arg z + \arg z' + k2\pi$ ؛ $\arg z^n = n \arg z + k2\pi$.
- $\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z' + k2\pi$ حيث $z' \neq 0$ و $k \in \mathbb{Z}$.

حالة خاصة إذا كان $|z| = 1$ فأن $\arg \frac{1}{z} = \arg \bar{z} = -\arg z + 2k\pi$

V - توظيف الأعداد المركبة في دراسة مجموعات النقط

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{u} , \vec{v})$.

- إذا كان $A(z_1)$، $B(z_2)$ نقطتين من المستوي فإن $|\overrightarrow{AB}| = |z_2 - z_1|$

  $(\vec{u} ; \overrightarrow{AB}) = \arg (z_2 - z_1) + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

- إذا كان $A(z_1)$، $B(z_2)$، $C(z_3)$، $D(z_4)$ نقطا من المستوي فإن

  $(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

  $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right) + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

- r عدد حقيقي موجب، θ عدد حقيقي، $\omega(z_0)$ نقطة من المستوي.

مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق العلاقة $z = z_0 + re^{i\theta}$ هي :

أ) دائرة مركزها ω و نصف قطرها r من أجل r ثابت و θ متغير.

ب) نصف مستقيم مبدؤه النقطة ω و $e^{i\theta}$ لاحقة شعاع توجيه له من أجل r متغير و θ ثابت.

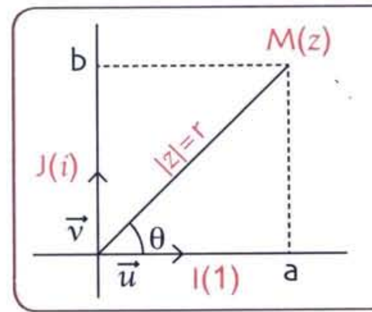
VI - الشكل المثلثي لعدد مركب غير منعدم

1. تعريف

z عدد مركب غير منعدم ؛ نضع $|z| = r$ و $\arg z = \theta + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

الكتابة $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد المركب z

و نكتب $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.



2. الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي و العكس

- للانتقال من الشكل $z = a + ib$ إلى الشكل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، نحسب r، $\cos\theta$، $\sin\theta$.
  حيث $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $\cos\theta = \frac{a}{r}$ و $\sin\theta = \frac{y}{r}$.
- للإنتقال من الشكل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ إلى الشكل $z = a + ib$ نحسب a و b
  حيث $a = r\cos\theta$ و $b = r\sin\theta$.

ملاحظات

- $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ يكافئ $r = r'$ و $\theta = \theta' + k2\pi$
  حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $r > 0$ و $r' > 0$.
- الكتابة $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$ هي الشكل الجبري للعدد $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
- إذا كان $r < 0$ فالكتابة $-r[\cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)]$ هي الشكل المثلثي للعدد z.

3. دستور موافر (Moivre)

من أجل كل عدد n من $\mathbb{Z}$، $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

العلاقة $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ تسمى دستور موافر.

VII - الشكل الأسي لعدد مركب

ترميز أولير (Euler)

نضع من أجل كل عدد حقيقي θ، $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

يرمز العدد $e^{i\theta}$ إلى العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له.

الكتابة $e^{i\theta}$ تسمى ترميز أولير للعدد المركب $\cos\theta + i\sin\theta$.

1. تعريف

z عدد مركب غير منعدم طويلته r و θ عمدة له.

الكتابة $z = re^{i\theta}$ تسمى الشكل الأسي للعدد z.

2. قواعد الحساب

قواعد الحساب في الشكل الأسي هي قواعد الحساب على القوى.

نضع $z = re^{i\theta}$ و $z' = r'e^{i\theta'}$.

- $z.z' = r\,e^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = r.r'\,e^{i(\theta+\theta')}$

عمدة و طويلة $z.z'$

- $\bar{z} = \overline{r\,e^{i\theta}} = r\,e^{-i\theta}$

$-\theta$ هي عمدة $\bar{z}$ طويلة $\bar{z}$

- $\frac{z}{z'} = \frac{r\,e^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}\,e^{i(\theta-\theta')}$ حيث $z' \neq 0$

عمدة و طويلة $\frac{z}{z'}$

3. دستور موافر و ترميز أولير

دستور موافر الوارد في الشكل المثلثي يكتب على الشكل الأسي كما يلي :

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

نتيجة

من العلاقتين $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ و $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

ينتج أن $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ و $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

تسمى كل من هاتين العلاقتين دستور أولير.

VIII - الجذران التربيعيان لعدد مركب غير منعدم

- z عدد مركب غير منعدم حيث $z = a + ib$ ؛ $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$

$\mathfrak{z}$ عدد مركب غير منعدم حيث $\mathfrak{z} = x + iy$ ؛ $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$

$\mathfrak{z}$ جذر تربيعي للعدد z إذا و فقط إذا كان $\mathfrak{z}^2 = z$

أي أن $(x + iy)^2 = a + ib$

و بالتالي
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

بحل هذه الجملة نجد الجذرين التربيعيين $\mathfrak{z}_1$ و $\mathfrak{z}_2$ للعدد z حيث $\mathfrak{z}_2 = -\mathfrak{z}_1$.

- z عدد مركب غير منعدم حيث $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ؛ $r = |z|$ و $\theta = \arg z$

$\mathfrak{z}$ عدد مركب غير منعدم حيث $\mathfrak{z} = \rho(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$ ؛ $\rho = |\mathfrak{z}|$ و $\alpha = \arg \mathfrak{z}$

$\mathfrak{z}$ جذر تربيعي للعدد z إذا وفقط إذا كان $\mathfrak{z}^2 = z$.

أي أن $\rho^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

و بالتالي
$$\begin{cases} \rho^2 = r \\ 2\alpha = \theta + k2\pi \end{cases}$$
حيث $k \in \mathbb{Z}$

بحل هذه الجملة نجد الجذرين التربيعيين z_1 و z_2 للعدد z حيث $z_2 = -z_1$.

ملاحظة

إذا كان $z = re^{i\theta}$ و $z = \rho e^{i\alpha}$

فإن $z^2 = z$ إذا وفقط إذا كان $\rho^2 e^{2i\alpha} = re^{i\theta}$ أي أن $\rho^2 = r$ و $2\alpha = \theta$.

و بالتالي الجذران التربيعيان للعدد المركب z هما $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ و $z_2 = -z_1$.

IX - المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

- المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$ ؛ $b \in \mathbb{C}$ ؛ $c \in \mathbb{C}$ تسمى معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول z في $\mathbb{C}$.
- العدد المركب Δ حيث $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة السابقة.
- δ و $-\delta$ الجذران التربيعيان للعدد المركب Δ.

مبرهنة

المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{C}$ هما $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ و $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$.

- إذا كان $\Delta = 0$ فإن $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$ و إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن $z_1 \neq z_2$.

ملاحظات

1 • إذا كان $b = 2b'$ فإن $\Delta' = b'^2 - ac$ و $z_1 = \dfrac{-b'+\delta'}{a}$ و $z_2 = \dfrac{-b'-\delta'}{a}$

حيث δ' جذر تربيعي للعدد Δ'.

2 • a ،b ،c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$.

إذا كان $\Delta \geq 0$ فإن المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ تقبل حلين حقيقيين.

إذا كان $\Delta < 0$ فإن $i\sqrt{-\Delta}$ جذر تربيعي للعدد Δ

و المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ تقبل حلين مترافقين في $\mathbb{C}$

هما $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \bar{z}_1$.

X - التحويلات النقطية و الأعداد المركبة

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

دراسة التحويلات النقطية التي ترفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$

حيث $z' = az + b$ ؛ $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{C}$ أو $a \in \mathbb{C}^*$ و $|a| = 1$ و $b \in \mathbb{C}$.

التحويل النقطي و عناصره المميّزة	التعريف الهندسي	الكتابة المركبة	التمثيل
t هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}$	$t : M \longmapsto M'$ حيث $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$	$t : M(z) \longmapsto M'(z')$ حيث $z' = z + b$ و $\vec{v}$ الشعاع الذي لاحقته b	M′ M $\vec{v}$ $\vec{j}$ O $\vec{i}$
h هو التحاكي الذي مركزه ω و نسبته λ حيث $\lambda \in \mathbb{R}^*$	$h : M \longmapsto M'$ حيث $\overrightarrow{\omega M'} = \lambda\ \overrightarrow{\omega M}$	$h : M(z) \longmapsto M'(z')$ حيث $z' - z_0 = \lambda\,(z - z_0)$ و z_0 هي لاحقة ω	M′ M ω $\vec{j}$ O $\vec{i}$
r هو الدوران الذي مركزه ω و زاويته θ حيث $\theta \in \mathbb{R}$	$r : M \longmapsto M'$ حيث $\begin{cases} \omega M' = \omega M \\ (\overrightarrow{\omega M'}; \overrightarrow{\omega M}) = \theta + k2\pi \end{cases}$ و $k \in \mathbb{Z}$	$r : M(z) \longmapsto M'(z')$ حيث $z' - z_0 = e^{i\theta}\,(z - z_0)$ و z_0 هي لاحقة ω $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$	M′ M θ ω $\vec{j}$ O $\vec{i}$

و بالعكس، كل تحويل نقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$.
حيث $z' = az + b$ مع $a \in \mathbb{C}^*$ و $b \in \mathbb{C}$ هو :
1 • إنسحاب شعاعه $\vec{v}(b)$ إذا كان $a = 1$.
2 • تحاك نسبة a إذا كان $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$.
(مركزه النقطة ω التي لاحقتها $\frac{b}{1-a}$).
3 • دوران زاويته θ حيث $\theta = \arg a + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$ إذا كان $a \neq 1$ و $|a| = 1$
(مركزه النقطة ω التي لاحقتها $\frac{b}{1-a}$).

ملاحظتان

1 • كل من التحاكي الذي مركزه ω و نسبة 1 - و الدوران الذي مركزه ω و زاويته π هو تناظر مركزه ω و كتابته المركبة هي : $z' = -z + 2z_0$ حيث z_0 لاحقة ω.
2 • كل نقطة تنطبق على صورتها بتحويل نقطي تسمى نقطة صامدة لهذا التحويل.

r هو دوران مركزه ω و زاويته θ	h هو تحاك مركزه ω و نسبته k	t هو إنسحاب شعاعه $\vec{v}$
• إذا كان $\theta \neq k2\pi$ فإنه توجد نقطة صامدة واحدة و هي المركز ω. • إذا كان $\theta = k2\pi$ فإن كل نقطة من المستوي صامدة بهذا الدوران.	• إذا كان $k \neq 1$ فإنه توجد نقطة صامدة واحدة و هي المركز ω. • إذا كان $k = 1$ فإن كل نقطة من المستوي صامدة بهذا التحاكي.	• إذا كان $\vec{v} \neq \vec{0}$ فإنه لا توجد نقط صامدة. • إذا كان $\vec{v} = \vec{0}$ فإن كل نقطة من المستوي صامدة بهذا الانسحاب.

1 إنجاز العمليات الحسابية على الاعداد المركبة

تمرين 1

أنجز العمليات الحسابية التالية، ثم اكتب العدد الناتج على الشكل الجبري.

$(2 + 3i)^2$ ، $(3 + 4i)(3 - 4i)$ ، $(1 + i)^3$ ، $\frac{i - 5}{3 + 5i}$ ، $\frac{3 - i}{1 - i} \times \frac{2 - i}{3 + i}$ ، $\frac{2 + 3i}{1 - i} + \frac{i - 4}{2 + 5i}$

حل

قواعد الحساب في $\mathbb{C}$ هي قواعد الحساب المعروفة في $\mathbb{R}$ مع $i^2 = -1$.

• $(2 + 3i)^2$ من الشكل $(a + ib)^2$ ؛ لدينا $(2 + 3i)^2 = (2)^2 + 2(2) \times (3i) + (3i)^2$

$= 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i + 9(-1)$

و بالتالي $(2 + 3i)^2 = -5 + 12i$.

• $(3 + 4i)(3 - 4i)$ من الشكل $(a + ib)(a - ib)$. لدينا $(3 + 4i)(3 - 4i) = (3)^2 - (4i)^2$

$= 9 - 16(-1)$

و بالتالي $(3 + 4i)(3 - 4i) = 25$.

• $(1 + i)^3$ من الشكل $(a + ib)^3$ ؛ لدينا $(1 + i)^3 = 1^3 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i$.

إذن $(1 + i)^3 = -2 + 2i$.

ملاحظة : يمكن كتابة $(1 + i)^3$ على الشكل $(1 + i)(1 + i)^2$ ثم إجراء الحساب.

• حساب $\frac{i - 5}{3 + 5i}$. لدينا $\frac{i - 5}{3 + 5i} = \left(\frac{i - 5}{3 + 5i}\right)\left(\frac{3 - 5i}{3 - 5i}\right)$

$= \frac{3i - i(-5i) - 5 \times 3 + 5(-5i)}{3^2 - (5i)^2} = \frac{-10 + 28i}{34} = -\frac{5}{17} + \frac{14i}{17}$

و بالتالي $\frac{i - 5}{3 + 5i} = -\frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$

• حساب $\frac{2 - i}{3 + i} \times \frac{3 - i}{1 - i}$.

لدينا $\frac{(2 - i)(3 - i)}{(3 + i)(1 - i)} = \frac{6 - 2i - 3i + i^2}{3 - 3i + i - i^2} = \frac{5 - 5i}{4 - 2i}$

كتابة العدد المركب $\frac{5 - 5i}{4 - 2i}$ على الشكل الجبري .

• لدينا $\frac{5 - 5i}{4 - 2i} = \frac{(5 - 5i)(4 + 2i)}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \frac{20 + 10i - 20i - 10i^2}{20} = \frac{30 - 10i}{20} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

و بالتالي $\frac{(2 - i)(3 - i)}{(3 + i)(1 - i)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

• حساب $\frac{i-4}{2+5i}+\frac{2+3i}{1-i}$

بعد توحيد المقامين نكتب : $\frac{i-4}{2+5i}+\frac{2+3i}{1-i}=\frac{(i-4)(1-i)+(2+3i)(2+5i)}{(2+5i)(1-i)}$

$$\frac{(i-i^2-4+4i)+(4+10i+6i+15i^2)}{2-2i+5i-5i^2}=\frac{-14+21i}{7+3i}$$

و بالتالي $\frac{i-4}{2+5i}+\frac{2+3i}{1-i}=\frac{-14+21i}{7+3i}$

كتابة العدد المركب $\frac{-14+21i}{7+3i}$ على الشكل الجبري. لدينا $\frac{-14+21i}{7+3i}=\frac{(-14+21i)(7-3i)}{(7+3i)(7-3i)}$

$$\frac{-14+21i}{7+3i}=\frac{-35}{58}+\frac{189}{58}i$$

بعد الحساب و الاختصار نجد $\frac{i-4}{2+5i}+\frac{2+3i}{1-i}=\frac{-35}{58}+\frac{189}{58}i$

تمرين 3

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. علم النقط A ، B ، C ذات اللواحق $1+i$ ، $4-i$ ، $-\frac{1}{2}+3i$ على الترتيب. احسب لواحق الاشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

حل

• إحداثيات النقط A ، B ، C هي $(1;1)$، $(4;-1)$ ، $\left(-\frac{1}{2};3\right)$ على الترتيب.

• الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو صورة العدد المركب $(4-i)-(1+i)$.

إذن لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $3-2i$.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هي $\left(-\frac{1}{2}+3i\right)-(1+i)$.

أي $-\frac{3}{2}+2i$.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هي $\left(-\frac{1}{2}+3i\right)-(1+i)$.

أي $-\frac{3}{2}+4i$.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ هي $(3-2i)+\left(-\frac{1}{2}+2i\right)$ أي $\frac{3}{2}$.

ملاحظة بما أن لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ عدد حقيقي فإن هذا الشعاع يوازي الشعاع $\overrightarrow{OI}$.

تمرين 3

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

عين مجموعة النقط M ذات اللواحق z في كل حالة من الحالتين التاليتين :

$$\mathcal{I}m\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=0 \quad ، \quad \mathcal{R}e\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=0$$

حل

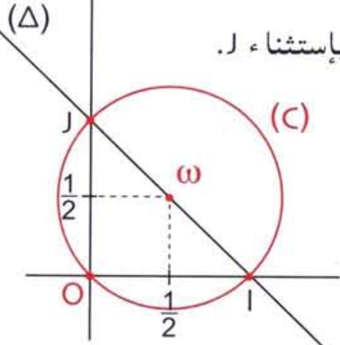
نضع $z=x+iy$ حيث x ، y عددان حقيقيان.

نكتب العدد $\frac{z-1}{z-i}$ على الشكل الجبري مع $z\neq i$

لدينا
$$\frac{z-1}{z-i}=\frac{x-1+iy}{x+i(y-1)}=\frac{\left[x-1+iy\right]\left[x-i(y-1)\right]}{\left[x+i(y-1)\right]\left[x-i(y-1)\right]}$$
$$=\frac{x(x-1)+y(y-1)+i\left[-(x-1)(y-1)+xy\right]}{x^2+(y-1)^2}$$

بعد الحساب و الاختصار نجد :
$$\mathcal{R}e\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=\frac{x^2+y^2-x-y}{x^2+(y-1)^2}$$
$$\mathcal{I}m\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=\frac{x+y-1}{x^2+(y-1)^2}$$

- مجموعة النقط M ذات اللواحق z حيث $\mathcal{R}e\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=0$ هي مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $x^2+y^2-x-y=0$ باستثناء النقطة $J(0;1)$.



هذه المجموعة هي دائرة (C) مركزها $\omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها $O\omega$ بإستثناء J.

- مجموعة النقط M ذات اللواحق z حيث $\mathcal{I}m\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=0$

هي مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $x+y-1=0$
باستثناء النقطة $J(0;1)$.

و هي مستقيم (Δ) معين بالنقطتين $I(1;0)$ و $J(0;1)$ باستثناء J.

2 استعمال خواص مرافق عدد مركب

تمرين 1

z عدد مركب. اكتب، بدلالة $\bar{z}$، مرافق كل عدد مركب فيما يلي :

$z_1=1+iz$ ، $z_2=i(3+z)$ ، $z_3=(z-i)(z+3)$ ، $z_4=\frac{1-z}{1+iz}$ ، $z_5=\frac{2z^2+z-1}{-3z+i}$

حل

لدينا • $\bar{z}_1 = \overline{1 + iz} = \bar{1} + \overline{iz} = 1 + \bar{i}\bar{z}$ إذن $\bar{z}_1 = 1 - i\bar{z}$.

• $\bar{z}_2 = \overline{i(3+z)} = \bar{i}\,\overline{(3+z)} = -i(\bar{3} + \bar{z})$ إذن $\bar{z}_2 = -i(3 + \bar{z})$.

• $\bar{z}_3 = \overline{(z-i)(z+3)} = \overline{(z-i)}\,\overline{(z+3)} = (\bar{z} - \bar{i})(\bar{z} + \bar{3})$ إذن $\bar{z}_3 = (\bar{z} + i)(\bar{z} + 3)$.

• $\bar{z}_4 = \overline{\left(\frac{1-z}{1+iz}\right)} = \frac{\overline{1-z}}{\overline{1+iz}} = \frac{\bar{1} - \bar{z}}{\bar{1} + \overline{iz}}$ إذن $\bar{z}_4 = \frac{1 - \bar{z}}{1 - i\bar{z}}$.

• $\bar{z}_5 = \overline{\left(\frac{2z^2 + z - 1}{-3z + i}\right)} = \frac{\overline{2z^2 + z - 1}}{\overline{-3z + i}} = \frac{2(\bar{z}^2) + \bar{z} - 1}{-3\bar{z} + \bar{i}}$ إذن $\bar{z}_5 = \frac{2(\bar{z}^2) + \bar{z} - 1}{-3\bar{z} - i}$

تمرين 1

حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين للمجهول z التاليتين :

(1) $z = 2\bar{z} - 2 + 6i$ (2) $2z + i\bar{z} = 5 - 4i$

حل

• حل المعادلة (1) : نضع $z = x + iy$ فيكون $\bar{z} = x - iy$ بعد تعويض كل من z و $\bar{z}$ في (1) .

تكتب المعادلة (1) : $x + iy = 2(x - iy) - 2 + 6i$.

و تبسط على الشكل $(x-2) + (-3y+6)i = 0$

هذا يعني $x - 2 = 0$ و $-3y + 6 = 0$

إذن $x = 2$ و $y = 2$

و بالتالي $z = 2 + 2i$ و هو حل المعادلة (1) .

• حل المعادلة (2) نضع $z = x + iy$ فيكون $\bar{z} = x - iy$ نعوض z ، $\bar{z}$.

في المعادلة (2) فنجد $2(x + iy) + i(x - iy) = 5 - 4i$.

أي أن $2x + 2iy + ix - i^2y = 5 - 4i$ أو $2x + y + i(x + 2y) = 5 - 4i$

إذن $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$ و نحل هذه الجملة و نجد $x = \frac{14}{3}$ و $y = \frac{-13}{3}$

و يكون حل المعادلة (2) هو $z = \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i$

3 التعرف على الشكل الجبري أو الشكل المثلثي أو الشكل الأسي لعدد مركب غير منعدم

تمرين 1

من بين الأعداد المركبة z التالية ميز بين المكتوبة منها على الشكل الجبري أو على الشكل المثلثي أو على الشكل الأسي.

$$z = \sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12} \quad ; \quad z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} \quad ; \quad z = i \quad ; \quad z = -10$$

$$z = 2e^{i} \quad ; \quad z = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \quad ; \quad z = \frac{1}{1+0} \quad ; \quad z = \sqrt{2}(i+1)$$

$$z = (\sqrt{3}-2)e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad z = \sin\frac{2\pi}{3}e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z = \cos\frac{2\pi}{3}e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z = 1 + e^{i\pi}$$

$$z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) \quad ; \quad z = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

حل

نلخص الأجوبة في الجدول التالي :

العدد z	z مكتوب على الشكل الجبري $a + ib$ حيث ...	z مكتوب على الشكل المثلثي $r(\cos\theta + i\sin\theta)$	z مكتوب على الشكل الأسي $re^{i\theta}$ حيث ...	ملاحظات
-10	$a = -10 ; b = 0$			
i	$a = 0 ; b = 1$			
$\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$	$a = \cos\frac{\pi}{12}$ $b = \sin\frac{\pi}{12}$	$r = 1 \; ; \; \theta = \frac{\pi}{12}$		
$\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}$	$a = \sin\frac{\pi}{12}$ $b = \cos\frac{\pi}{12}$			
$\sqrt{2}(i+1)$				z هو جداء عددين مركبين
$\frac{1}{1+i}$				z هو مقلوب عدد مركب
$-\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$				$-\sqrt{2} < 0$
$2e^{i}$			$r = 2 \; ; \; \theta = 1$	

$1 + e^{i\pi}$				z هو مجموع عددين مركبين
$\cos \frac{2\pi}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$				$\cos \frac{2\pi}{3} < 0$
$\sin \frac{2\pi}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$			$r = \sin\frac{2\pi}{3}$ $\theta = \frac{\pi}{3}$	
$(\sqrt{3} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}}$				$\sqrt{3} - 2 < 0$
$e^{-i\frac{\pi}{2}}$			$r = 1 \ ; \ \theta = -\frac{\pi}{2}$	
$\sqrt{3}\left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}\right)$		$r = \sqrt{3} \ ; \ \theta = \frac{7\pi}{12}$		

4 حساب طويلة و عمدة عدد مركب غير منعدم و كتابته على شكل مثلثي أو شكل أسي

تمرين 1

• احسب الطويلة و عمدة لكل عدد مركب فيما يلي ثمّ اكتبه على الشكل المثلثي و على الشكل الأسي.

$z_1 = -3i$ ؛ $z_2 = -10$ ؛ $z_3 = \frac{\pi}{2}$ ؛ $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$ ؛ $z_5 = \frac{-\sqrt{2}}{1 + i}$

$z_6 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$ ؛ $z_7 = \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}\right)^8$ ؛ $z_8 = \frac{(1 - i)^5}{(1 - i\sqrt{3})^4}$

حل

• الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد z_1 : $|z_1| = |-3i| = |-3|\,|i|$ إذن $|z_1| = 3$

$\arg z_1 = \arg(-3i) + 2k\pi = \arg(-3) + \arg(i) + 2k\pi = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

إذن $\arg z_1 = 3\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

الكتابة $3\left[\cos\left(3\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(3\frac{\pi}{2}\right)\right]$ هي الشكل المثلثي للعدد $z_1 = -3i$.

الكتابة $z_1 = 3e^{i\frac{3\pi}{3}}$ هي الشكل الأسي للعدد z_1.

• الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد z_2 $10 = |-10| = |z_2|$ (لأن z_2 عدد حقيقي).

$k \in \mathbb{Z}$ ؛ $\arg z_2 = -\pi + k2\pi$ إذن $\arg z_2 = \arg(-10) + k2\pi$

الكتابة $\left(10\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right)\right)$ هي الشكل المثلثي للعدد $z_2 = -10$.

الكتابة $z_2 = 10\,e^{-i\pi}$ هي الشكل الأسي للعدد $z_2 = -10$.

• الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد z_3 :

$|z_3| = \left|\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}$ و $\arg z_3 = 0 + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$ (لأن z_3 عدد حقيقي).

$z_3 = \frac{\pi}{2}(\cos 0 + i\sin 0)$ ؛ $z_3 = \frac{\pi}{2}e^{i0}$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد z_4 ؛ $|z_4| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^3} = 2$

$$z_4 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

إذن $\arg z_4 = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

لدينا $|z_4| = 2$ ؛ $\arg z_4 = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ؛ إذن $z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ؛ $z_4 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد z_5 :

$$|z_5| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{1+i}\right| = \frac{|-\sqrt{2}|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+1^2}}$$ أي $|z_5| = 1$

$k \in \mathbb{Z}$ ؛ $\arg z_5 = \arg(-\sqrt{2}) - \arg(1+i) + k2\pi$

$\arg(-\sqrt{2}) = \pi + k2\pi$ ؛ و لدينا $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

أي $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ إذن $\arg z_5 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$

لدينا $|z_5| = 1$ و $\arg z_5 = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ إذن $z_5 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$ و $z_5 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد z_6 :

$$|z_6| = \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right| = \frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1+i|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$ أي $|z_6| = \sqrt{2}$

$k \in \mathbb{Z}$ ؛ $\arg z_6 = \arg(1 + i\sqrt{3}) - \arg(1+i) + k2\pi$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$|z_6| = \sqrt{2}$ و $\arg z_6 = \frac{\pi}{12} + k2\pi$ إذن $z_6 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ؛ $z_6 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد z_7 :

$$|z_7| = \left|\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right|^8 = \frac{|\sqrt{3}+i|^8}{|1+i|^8} = \frac{2^8}{(\sqrt{2})^8} = 16$$ أي $|z_7| = 16$

لدينا $z_7 = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^8$ إذن $\arg z_7 = 8 \arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right) + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

$$= 8\left[\arg(\sqrt{3}+i) - \arg(1+i)\right] + k2\pi$$

لنحسب عمدة للعدد $\sqrt{3}+i$.

لدينا $|\sqrt{3}+i| = 2$ و $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ و نعلم مما سبق أن $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

$\arg z_7 = 8\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi$ و بعد الإختصار نجد $\arg z_7 = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

بما أن $|z_7| = 16$ و $\arg z_7 = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ فإن $z_7 = 16\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ ؛ $z_7 = 16e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد z_8

$$|z_8| = \left|\frac{(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^4}\right| = \frac{|(1-i)^5|}{|(1-i\sqrt{3})^4|} = \frac{|1-i|^5}{|1-i\sqrt{3}|^4}$$

لدينا $|1-i| = \sqrt{2}$ إذن $|1-i|^5 = (\sqrt{2})^5$ و $|1-i\sqrt{3}| = 2$ إذن $|1-i\sqrt{3}|^4 = 2^4$

بعد الاختصار نجد $|z_8| = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

لدينا $\arg z_8 = \arg(1-i)^5 - \arg(1-i\sqrt{3})^4 + k2\pi$

$$= 5\arg(1-i) - 4\arg(1-i\sqrt{3}) + k2\pi$$

نحسب عمدة للعدد $1-i$ و لتكن θ و عمدة للعدد $1-i\sqrt{3}$ و لتكن θ'.

لدينا $|1-i| = \sqrt{2}$ ، $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ إذن $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

و بالمثل $|1-i\sqrt{3}| = 2$ ، $\cos\theta' = \frac{1}{2}$ و $\sin\theta' = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ إذن $\theta' = -\frac{\pi}{3}$.

أي أن $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ و $\arg(1-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$

نحسب $\arg z_8$. $\arg z_8 = 5\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 4\left(-\frac{\pi}{3}\right) + k2\pi$

بعد الحساب و الاختصار نجد $\arg z_8 = \frac{\pi}{12} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

لدينا $|z_8| = \frac{\sqrt{2}}{4}$. $\arg z_8 = \frac{\pi}{12} + k2\pi$ إذن $z_8 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ و $z_8 = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{\pi}{12}}$

5 الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي

تمرين 1

• أكتب على الشكل الجبري ثم على شكل مثلثي كل عدد مركب مما يلي

$z_1 = \dfrac{-1 + 3i\sqrt{3}}{10 - 2i\sqrt{3}}$ ؛ $z_2 = \dfrac{4}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$ ؛ $z_3 = 5\left(\cos\dfrac{2\pi}{5} - i\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)$

$z_4 = 1 + i\tan\dfrac{17\pi}{12}$ ؛ $z_5 = \dfrac{1}{1 + i\tan\dfrac{\pi}{12}}$

حل

• كتابة العدد z_1 على الشكل الجبري :

لدينا $z_1 = \dfrac{-1 - 3i\sqrt{3}}{10 - 2i\sqrt{3}} = \dfrac{(-1 + 3i\sqrt{3})(10 + 2i\sqrt{3})}{(10 - 2i\sqrt{3})(10 + 2i\sqrt{3})} = \dfrac{-28 + 28i\sqrt{3}}{10^2 - (2\sqrt{3})^2}$

و بعد الاختصار نجد $z_1 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{i\sqrt{3}}{4}$ و هو الشكل الجبري للعدد z_1.

كتابة العدد z_1 على الشكل المثلثي :

نضع $r = |z_1|$ و θ عمدة للعدد z_1.

لدينا $r = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}$ إذن $r = \dfrac{1}{2}$ أي $|z_1| = \dfrac{1}{2}$.

كذلك $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} \end{cases}$ أي $\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ إذن $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{3}$ أي $\arg z_1 = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$

و بالتالي $z_1 = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

• كتابة العدد z_2 على الشكل الجبري :

لدينا $z_2 = \dfrac{4}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}} = \dfrac{4(\sqrt{6} + i\sqrt{2})}{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(\sqrt{6} + i\sqrt{2})} = \dfrac{4\sqrt{6} + 4i\sqrt{2}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2}$

و بعد الاختصار نجد $z_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{i\sqrt{2}}{2}$.

• كتابة العدد z_2 على الشكل المثلثي :

لكتابة z_2 على الشكل المثلثي $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ نحسب r ، $\cos\theta$ ، $\sin\theta$.

لدينا $r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$

و $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} \end{cases}$ أي $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ إذن $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

لدينا $r = \sqrt{2}$ و $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ إذن $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

• كتابة العدد z_3 على الشكل الجبري

الكتابة $z_3 = 5\cos\frac{2\pi}{5} - 5\sin\frac{2\pi}{5}$ هي على الشكل $a + ib$.

إذن هي الشكل الجبري للعدد z_3.

ملاحظة : يمكن الاعتماد على الشكل الجبري للعدد z_3 لتعيين الشكل المثلثي له.

ذلك بفرض أن z_3 يكتب على الشكل $z_3 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث

$|z_3| = r$ $\arg z_3 = \theta + 2k\pi$ ثم تعيين كل من r و θ.

لدينا $r = \sqrt{\left(5\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 + \left(-5\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2} = 5$

$$\cos\theta = \frac{1}{5}\left(5\cos\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{2\pi}{5} = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{5}\left(-5\sin\frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$

إذن $\theta = -\frac{2\pi}{5} + 2k\pi$

و بالتالي $z_3 = \left[\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right]$

• كتابة العدد z_4 على الشكل الجبري :

العدد $1 + i\tan\frac{17\pi}{12}$ مكتوب على الشكل $a + ib$ فهو إذن الشكل الجبري للعدد z_4

جزؤه الحقيقي هو 1 و جزؤه التخيلي هو $\tan\frac{17\pi}{12}$.

• كتابة الشكل المثلثي للعدد z_4 :

لدينا $z_4 = 1 + i \tan \frac{17\pi}{12} = 1 + \frac{i \sin \frac{17\pi}{12}}{\cos \frac{17\pi}{12}}$

$$z_4 = \frac{1}{\cos \frac{17\pi}{12}} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12}\right)$$

بما أن العدد $\frac{1}{\cos \frac{17\pi}{12}} < 0$ فالكتابة السابقة ليست الشكل المثلثي للعدد z_4.

بكتابة z_4 على الشكل $z_4 = - \frac{1}{\cos \frac{17\pi}{12}} \left(- \cos \frac{17\pi}{12} - i \sin \frac{17\pi}{12}\right)$

نلاحظ أن $\frac{17\pi}{12} = \pi + \frac{\pi}{12}$ يكون $\cos \frac{17\pi}{12} = - \cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{17\pi}{12} = - \sin \frac{\pi}{12}$

ينتج أن $z_4 = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{12}} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$ و هي الشكل المثلثي للعدد z_4.

• كتابة العدد z_5 على الشكل الجبري :

لدينا $z_5 = \frac{1}{1 + i \tan\frac{\pi}{12}} = \frac{1 - i \tan\frac{\pi}{12}}{\left(1 + i \tan\frac{\pi}{12}\right)\left(1 - i \tan\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1 - i \tan\frac{\pi}{12}}{1 + \tan^2\frac{\pi}{12}}$

نعلم أن $\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}}$، و بعد التعويض نجد $z_5 = \cos^2 \frac{\pi}{12} \left(1 - i \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}}\right)$

ينتج أن $z_5 = \cos^2 \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$ و هو الشكل الجبري للعدد z_5

جزؤه الحقيقي $\cos^2 \frac{\pi}{12}$ و جزؤه التخيلي $- \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$.

• كتابة العدد z_5 على الشكل المثلثي :

لدينا $z_5 = \cos^2 \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$ أو $z_5 = \cos \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin\frac{\pi}{12}\right)$

بما أن $\cos \frac{\pi}{12} > 0$ فإن $z_5 = \cos \frac{\pi}{12} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$ و هو الشكل المثلثي للعدد z_5.

ملاحظة : يمكن اعتبار الشكل الجبري للعدد z_5 و حساب r ، $\cos \theta$ ، $\sin \theta$.

ثم كتابة z_5 على الشكل $r (\cos \theta + i \sin \theta)$ حيث $|z| = r$ $\arg z_5 = \theta + k2\pi$

$r^2 = \cos^4\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{\pi}{12} = \cos^2\frac{\pi}{12}\left(\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12}\right) = \cos^2\frac{\pi}{12}$ اذن $r = \cos\frac{\pi}{12}$

$$\cos\theta = \frac{\cos^2\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \cos\frac{\pi}{12}$$ و $$\sin\theta = \frac{-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = -\sin\frac{\pi}{12}$$

إذن $\begin{cases}\cos\theta = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\\ \sin\theta = \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\end{cases}$ و بالتالي $\theta = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

ينتج أن $z_5 = \cos^2\frac{\pi}{12}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

تمرين 2

• أكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية :

$z_1 = -5e^{i\frac{\pi}{4}}$ ؛ $z_2 = (\sqrt{3} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}}$ ؛ $z_3 = 3ie^{i\pi}$ ؛ $z_4 = (1 + i)e^{i\frac{3\pi}{4}}$

حل

• كتابة العدد z_1 على شكل مثلثي :

$-5 < 0$ ، $-5e^{i\frac{\pi}{4}}$ ليس الشكل الأسي للعدد z_1.

نعلم أن $e^{i\pi} = -1$ و $-5 = 5e^{i\pi}$ إذن $z_1 = 5e^{i\pi} . e^{i\frac{\pi}{4}} = 5e^{\left(i\pi + i\frac{\pi}{4}\right)}$

أي $z_1 = 5e^{i\frac{5\pi}{4}}$. إذن $z_1 = 5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

ملاحظة : يمكن أن نكتب $z_1 = -5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

$$= 5\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 5\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

و بالتالي $z_1 = 5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

• كتابة العدد z_2 على شكل مثلثي :

$\sqrt{3} - 2 < 0$ ، $(\sqrt{3} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}}$ ليس الشكل الأسي للعدد z_2.

نعلم أن $e^{i\pi} = -1$ إذن $z_2 = -(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{4}} = (2 - \sqrt{3})e^{i\pi} . e^{i\frac{\pi}{4}} = (2 - \sqrt{3})e^{i\frac{5\pi}{4}}$

أي $z_2 = (2 - \sqrt{3})e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

و بالتالي يكون $z_2 = (2 - \sqrt{3})\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ هو الشكل المثلثي للعدد z_2.

ملاحظة : يمكن كتابة الشكل المثلثي للعدد z_2 دون المرور على الشكل الأسي له.

• كتابة العدد z_3 على شكل مثلثي :

نعلم أن $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ إذن $3i e^{i\pi} = 3e^{i\frac{\pi}{2}} . e^{i\pi}$

و بالتالي $z_3 = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$. إذن $z_3 = 3\left(cos\ \frac{3\pi}{2} + i\,sin\ \frac{3\pi}{2}\right)$ و هو الشكل المثلثي للعدد z_3.

ملاحظة : العدد z_3 يمكن أن يكتب $z_3 = 3i\,(-1)$

أو $z_3 = 3\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ و هو الشكل المثلثي للعدد z_3.

• كتابة العدد z_4 على شكل مثلثي :

نعلم أن $|1 + i| = \sqrt{2}$. $arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ إذن $1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

و يكون $z_4 = (1 + i)\ e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} . e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\,e^{\left(i\frac{\pi}{4} + i\frac{3\pi}{4}\right)}$.

أي $z_4 = \sqrt{2}\,e^{i\pi}$ و هو الشكل الأسي للعدد z_4.

إذن $z_4 = \sqrt{2}\ (cos\ \pi + i\,sin\,\pi)$ و هو الشكل المثلثي للعدد z_4.

6 توظيف الأعداد المركبة في دراسة مجموعات نقط

تمرين 1

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u}\ , \vec{v})$. A ، B ، C ، D نقط لواحقها على الترتيب $z_1 = 1 + i$ ، $z_2 = 4 + 5i$ ، $z_3 = 5 - 2i$ ، $z_4 = \frac{13}{3} + \frac{8}{3}i$

1 • اثبت أن النقط B ، C ، D على استقامة واحدة.

2 • اثبت أن المستقيمين (AB) و (AC) متعامدان.

حل

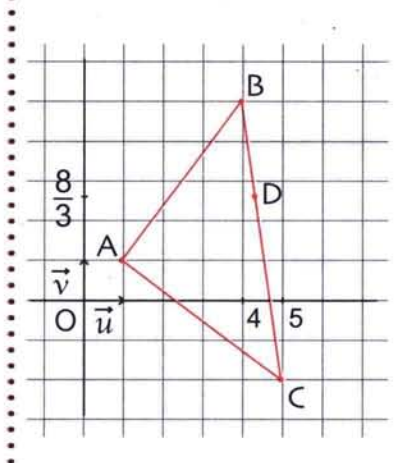
1 • النقط B ، C ، D على استقامة واحدة يعني أن $(\overrightarrow{DB} ; \overrightarrow{DC}) = k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

لدينا $(\overrightarrow{DB} ; \overrightarrow{DC}) = arg\ \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4}$

$z_3 - z_4 = \frac{2}{3} - \frac{14}{3}i$ و $z_2 - z_4 = -\frac{1}{3} + \frac{7}{3}i$ إذن $\frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} = -2$.

و بالتالي $arg\ \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} = arg\ (-2) = \pi + k2\pi$ أو $(\overrightarrow{DB} ; \overrightarrow{DC}) = \pi + k2\pi$

و بالتالي النقط B ، C ، D على استقامة واحدة.



ملاحظة : يمكن أن نبرهن هذه النتيجة بحساب لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{DB}$ ، $\overrightarrow{DC}$ ثم ملاحظة أن $z_3 - z_4 = -2(z_2 - z_4)$

أي $\overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB}$ و بالتالي فالشعاعان $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطان خطيا. أي أن النقط B، C، D على استقامة واحدة.

2 • المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان يعني

أن $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

لدينا $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$

$z_3 - z_1 = 4 - 3i$ ؛ $z_2 - z_1 = 4 + 3i$ ينتج أن $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{4 - 3i}{3 + 4i} = -i$

و بالتالي $\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. إذن $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

و بالتالي المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان.

ملاحظة : يمكن أن نبرهن هذه النتيجة بحساب $BC^2 = |z_2 - z_1|^2 = 25$ ؛ $AC^2 = |z_3 - z_1|^2 = 25$
$BC^2 = |z_3 - z_2|^2 = 50$ و التحقق أن $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

تمرين 2

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. عين مجموعة النقط M ذات اللواحق z ثم مثلها بيانيا، في كل حالة مما يلي :

1 • $|z - 3| = |z - 1 - i|$
2 • $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$
3 • $\arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2}$
4 • $\arg(z - 2 + i) = \frac{\pi}{4}$
5 • $\arg \frac{z + 1}{z - 2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$
6 • $z = 1 + i + re^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $r \geq 0$
7 • $z = 1 + i + 2e^{i\theta}$ ، $\theta \in \mathbb{R}$

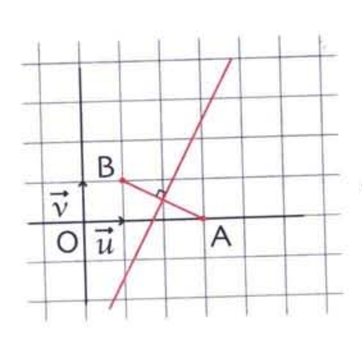
حل

1 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $|z - 3| = |z - 1 - i|$

نعين المجموعة بوضع $z = x + iy$ و حساب $|z - 1 - i|^2$ ، $|z - 3|^2$

بدلالة x ، y فيكون $|z - 3| = |z - 1 - i|$ يعني $4x - 2y - 7 = 0$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي محور القطعة [AB].



ملاحظة : إذا كانت A النقطة ذات اللاحقة 3

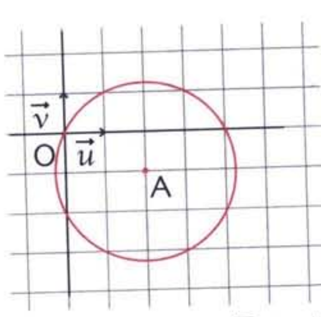
فإن $z - 3$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AM}$

و كانت B النقطة ذات اللاحقة $1 + i$ فإن $z - (1 + i)$

هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{BM}$

لدينا $|z - 3| = |z - (1 + i)|$ يعني $AM = BM$

و بالتالي مجموعة النقط المطلوبة هي محور القطعة [AB].



2 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$:

نعين المجموعة بوضع $z = x + iy$.

فيكون $|x - 2 + i(y + 1)| = \sqrt{5}$

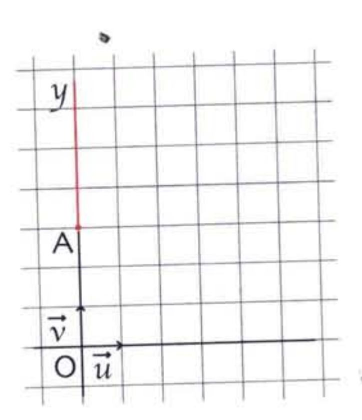
أي $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$

و هذه الأخيرة معادلة للدائرة التي مركزها A ذات اللاحقة $2 - i$ و نصف قطرها $\sqrt{5}$.

ملاحظة : إذا كانت A النقطة ذات اللاحقة $2 - i$ فإن $z - (2 - i)$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AM}$

$|z - 2 + i| = \sqrt{5}$ يعني $AM = \sqrt{5}$.

مجموعة النقط المطلوبة هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها $\sqrt{5}$.



3 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2}$.

لدينا $\arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

يعني $z - 3i$ تخيلي صرف أو أيضا

$\mathcal{R}(z - 3i) = 0$ و $\mathcal{I}m(z - 3i) \geq 0$ ...(*)

إذا فرضنا أن $z = x + iy$ فإن $z - 3i = x + i(y - 3)$

و تكتب الجملة (*) كما يلي $x = 0$ و $y \geq 3$

و تكون المجموعة المطلوبة هي $[Ay)$ (كما في الشكل).

ملاحظة : إذا كانت A النقطة ذات اللاحقة $3i$ فإن $(\vec{i} ; \overrightarrow{AM}) = \arg(z - 3i)$

إذن النقطة M تحقق $(\vec{i} ; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

مجموعة النقط M هي نقط الجزء $[Ay)$ من محور التراتيب الذي لا يشمل المبدأ.

4 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg(z - 2 + i) = \frac{\pi}{4}$ ...(*)

نعلم أن $\frac{\pi}{4}$ هي عمدة للعدد $1 + i$ إذن $\arg(z - 2 + i) = \arg(1 + i) + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

إذن $\arg(z - 2 + i) - \arg(1 + i) = k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

أو أيضا $\arg\left(\frac{z-2+i}{1+i}\right) = k2\pi$. و بالتالي مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق العلاقة (*)

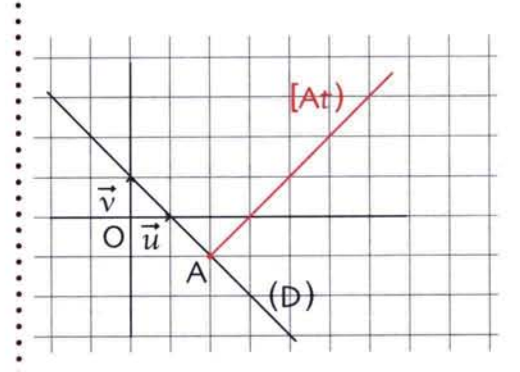
هي مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها العدد $\frac{z-2+i}{1+i}$ حقيقيا موجبا

أي $Im\left(\frac{z-2+i}{1+i}\right) = 0$ و $Re\left(\frac{z-2+i}{1+i}\right) \geq 0$.

نضع $z = x + iy$ فيكون $\frac{z-2+i}{1+i} = \frac{1}{2}[x+y-1+i(-x+y+3)]$

و تكون مجموعة النقط $M(x\,;\,y)$ المطلوبة هي التي تحقق

إحداثياتها الجملة $\begin{cases} -x+y+3=0 \\ x+y-1 \geq 0 \end{cases}$



و هي نصف المستقيم $[At)$ الذي مبدؤه

النقطة $A(2-i)$ و المحتوي في نصف المستوي

المحدود بالمستقيم (D) و الذي لا يشمل O.

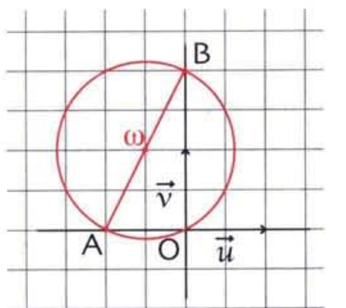
ملاحظة : إذا فرضنا أن A النقطة ذات اللاحقة $2-i$ فإن $(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{AM}) = \arg(z-(2-i))$

و بالتالي $(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$.

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي نصف المستقيم (Δ) الذي متدؤه النقطة A (كما في الشكل).

5 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg\frac{z+1}{z-2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$:

من أجل $z \neq 2i$ نكتب



$\arg\frac{z+1}{z-2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ يعني $\frac{z+1}{z-2i}$ تخيلي صرف.

نضع $z = x + iy$ و نكتب العدد $\frac{z+1}{z-2i}$ على الشكل الجبري.

لدينا $\frac{z+1}{z-2i} = \frac{(x+1)x + y(y-2)}{x^2+(y-2)^2} + \frac{i(2x-y+2)}{x^2+(y-2)^2}$

$\frac{z+1}{z-2i}$ تخيلي صرف يعني $Re\left(\frac{z+1}{z-2i}\right) = 0$

إذن مجموعة النقط M المطلوبة هي التي تحقق إحداثياتها المعادلة $x^2+y^2+x-2y=0$

و هي الدائرة التي مركزها $\omega\left(-\frac{1}{2}\,;\,2\right)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{2}$ بإستثناء $B(0\,;\,2)$.

ملاحظة : نفرض النقطتين $A(-1)$ و $B(2i)$.

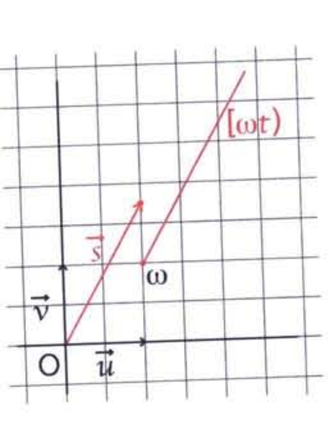
$\arg\frac{z-(-1)}{z-2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ يعني $(\overrightarrow{BM}\,;\,\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

إذن مجموعة النقط M المطلوبة هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ بإستثناء B.

6 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $z = 1 + i + re^{i\frac{\pi}{3}}$.

نضع $z = x + iy$ و $x + iy = 1 + i + r\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ينتج أن $r \geq 0$; $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}r \\ y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}r \end{cases}$ أو أيضا $\begin{cases} x - 1 = \frac{y - 1}{\sqrt{3}} \\ x \geq 1 \text{ و } y \geq 1 \end{cases}$



إذن المجموعة المطلوبة هي نصف المستقيم $[\omega t)$

الذي مبدؤه $\omega(1 + i)$ و $\vec{S}(e^{i\frac{\pi}{3}})$ شعاع توجيه له.

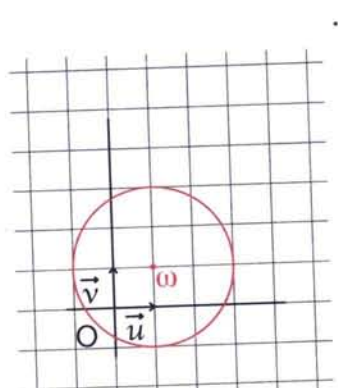
7 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $z = 1 + i + 2e^{i\theta}$ ، $\theta \in \mathbb{R}$.

نضع $z = x + iy$ إذن $x + iy = 1 + i + 2(\cos\theta + i\sin\theta)$

نستنتج أن $\begin{cases} x = 1 + 2\cos\theta \\ y = 1 + 2\sin\theta \end{cases}$ أي $\begin{cases} x - 1 = 2\cos\theta \\ y - 1 = 2\sin\theta \end{cases}$

و نجد $(x - 1)^2 + (x - 1)^2 = 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta$

أي $(x - 1)^2 + (x - 1)^2 = 4$



المجموعة المطلوبة هي الدائرة التي مركزها $\omega(1 + i)$ و نصف قطرها 2.

7 توظيف دستور موافر و ترميز أولير لحل مسائل

تمرين 1

عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $z = (\sqrt{3} + i)^n$

• حقيقيا. • تخيليا صرفا.

حل

العدد $\sqrt{3} + i$ مكتوب على الشكل الجبري.

لنكتب هذا العدد على الشكل المثلثي أي $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

فيكون $z = 2^n\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^n$

حسب دستور موافر $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^n = \cos n\frac{\pi}{6} + i\sin n\frac{\pi}{6}$ أي $z = \left(\cos n\frac{\pi}{6} + i\sin n\frac{\pi}{6}\right)$

• z عدد حقيقي يعني $\mathcal{Im}(z) = 0$ و $\mathcal{Im}(z) = 2^n i\sin n\frac{\pi}{6}$

إذن $\sin n\frac{\pi}{6} = 0$ أي $\sin n\frac{\pi}{6} = \sin(0)$

و بالتالي $n\frac{\pi}{6} = k\pi$ أو $n = 6k$ ؛ $k \in \mathbb{N}$

نستنتج أن $(\sqrt{3} + i)^n$ حقيقي إذا و فقط إذا كان $n = 6k$ ؛ $k \in \mathbb{N}$.

• z عدد تخيلي صرف يعني $\mathcal{R}e\,(z) = 0$ و $\mathcal{R}e\,(z) = 2^n \cos n\frac{\pi}{6}$

إذن $\cos n\frac{\pi}{6} = 0$ أو $\cos n\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{2}$

و بالتالي $n\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $n = 3 + 6k$ ؛ $k \in \mathbb{N}$

ينتج أن $(\sqrt{3} + i)^n$ حقيقي إذا و فقط إذا كان $n = 3 + 6k$ ؛ $k \in \mathbb{N}$.

تمرين 2

أكتب على الشكل الخطي الأعداد التالية :

$\cos^2 x$ ؛ $\sin^2 x$ ؛ $\cos^3 x$ ؛ $\sin^3 x$

حل

لكتابة الأعداد $\cos^2 x$ ؛ $\sin^2 x$ ؛ $\cos^3 x$ ؛ $\sin^3 x$ على الشكل الخطي،

نستعمل قانوني أولير $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ؛ $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

• لدينا $\cos^2 x = \left[\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right]^2 = \frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2) = \frac{1}{4}(2\cos 2x + 2)$

و بالتالي $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$

• لدينا $\sin^2 x = \left[\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right]^2 = \frac{1}{4}(e^{i2x} + e^{-i2x} - 2) = -\frac{1}{4}(2\cos 2x - 2)$

و بالتالي $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

• لدينا $\cos^3 x = \left[\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right]^3 = \frac{1}{8}(e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x})$

$= \frac{1}{8}\left[e^{i3x} + e^{-i3x} + 3(e^{ix} + e^{-ix})\right] = \frac{1}{8}(2\cos 3x + 6\cos x)$

و بعد التبسيط و الاختصار نجد $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

• لدينا $\sin^3 x = \left[\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right]^3 = -\frac{1}{8i}(e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x})$

$= -\frac{1}{8i}\left[e^{i3x} - e^{-i3x} - 3(e^{ix} - e^{-ix})\right] = -\frac{1}{8i}(2i\sin 3x + 6i\sin x)$

و بعد التبسيط و الاختصار نجد $\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$

تمرين 3

عبر عن $\cos 3x$ و $\sin 3x$ بدلالة $\cos x$ و $\sin x$.

حل

نحسب $(\cos x + i \sin x)^3$ بطريقتين :

بإستعمال دستور موافر نجد $(\cos x + i \sin x)^3 = \sin 3x + \cos 3x$.

و بإستعمال دستور ثنائي الحد نجد

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i \sin^3 x$$

اذن $\cos 3x + i \sin 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x + i\,(3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x)$

ينتج أن
$$\begin{cases} \cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x \\ \sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x \end{cases}$$

نعلم أن $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

و بالتالي $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ و $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

8 تعيين الجذرين التربيعيين لعدد مركب

تمرين 1

احسب الجذرين التربيعيين للعدد $z = 1 + i\sqrt{3}$

حل

العدد z يكتب على الشكل المثلثي $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

نفرض أن أحد الجذرين التربيعين للعدد z يكتب $r(\cos\theta + i \sin\theta)$ إذن

$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ أو $r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

أي أن
$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin 2\theta = \sin\frac{\pi}{3} \\ r^2 = 2 \end{cases}$$

ينتج أن $r = \sqrt{2}$ و $2\theta = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ أو $2\theta = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$

و $2\theta = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ أو $2\theta = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

و ينتج $r = \sqrt{2}$ و $2\theta = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$. إذن $r = \sqrt{2}$ و $\theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

$z_k = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\right]$ حيث ؛ $k \in \mathbb{Z}$ جذر للعدد z

و نحصل على الجذرين التربيعيين z_0 ، z_1 للعدد المركب z من أجل $k = 0$ و $k = 1$ و هما :

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad ; \quad z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)\right]$$

أي $z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $z_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $(z_1 = -z_0)$

ملاحظة : لدينا $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و يكون الجذران التربيعيان للعدد z هما $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_1 = -z_0$.

تمرين 2

عين الجذرين التربيعيين العدد المركب z حيث $z = -8-6i$

حل

نضع $\mathfrak{z} = x + iy$.

$\mathfrak{z}$ جذر تربيعي للعدد z يعني $z = \mathfrak{z}^2$

أي أن $(x+iy)^2 = -8-6i$ و بالتالي

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = -6 \end{cases}$$

هذه الجملة تبسط على الشكل التالي

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ xy < 0 \end{cases}$$

بحل هذه الجملة بطريقة الجمع، نجد $x^2 = 1$ و $y^2 = 9$ و $xy < 0$

ينتج أن $(x = 1$ و $y = -3)$ أو $(x = -1$ و $y = 3)$.

و بالتالي الجذران التربيعيان للعدد المركب $-8-6i$ هما $1-3i$ و $-1+3i$.

9 معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

تمرين 1

حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - 4(1-i)z + 2(4-i) = 0$

حل

لدينا $\Delta' = [-2(i-1)]^2 - 2(4-i)$ بعد الاختصار نجد $\Delta' = -8-6i$

بما أن Δ' عدد مركب غير منعدم فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في $\mathbb{C}$.

إذا كان الجذران التربيعيان للعدد المركب Δ' هما δ' و $-\delta'$ حيث $\delta' = 1-3i$ (إرجع إلى التمرين السابق)

فإن حلي المعادلة هما $z_1 = \frac{-b' + \delta'}{a} = 2(1-i) + (1-3i) = 3-5i$

و $z_2 = \frac{-b' - \delta'}{a} = 2(1-i) - (1-3i) = 1+i$

تمرين 2

حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z حيث $\frac{1}{2}z^2 - z + \frac{5}{2} = 0$

حل

مميز المعادلة هو $\Delta = (-1)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = -4$ أي $\Delta = 4i^2 = (2i)^2$

Δ عدد حقيقي و $\Delta < 0$ إذن المعادلة تقبل حلين مترافقين z_1 و z_2 حيث $z_1 = 1+2i$ و $z_2 = \overline{z_1}$.

10 معادلات يؤول حلها إلى معادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

تمرين 1

حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z حيث $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$.

حل

نضع $t = z^2$ فيكون $t^2 - 6t + 25 = 0 \quad \ldots\ (1)$

حساب Δ' : لدينا $\Delta' = 9 - 25 = -16 = -16i^2$ فيكون جذرا Δ هما $4i$، $-4i$.

للمعادلة (1) حلان هما $t = 3 + 4i$ أو $t = 3 - 4i$.

و بالتالي $z^2 = 3 + 4i$ أو $z^2 = 3 - 4i$.

تعيين الجذرين التربيعيين للعدد $3+4i$.

العدد المركب $\alpha + i\beta$ حيث α ؛ β عددان حقيقيان، جذر تربيعي للعدد $3+4i$.

يعني $(\alpha + i\beta)^2 = 3 + 4i$ أو $\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = 3 + 4i$.

و لدينا كذلك $|\alpha + i\beta|^2 = |3+4i|$ إذن

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 3 \\ 2\alpha\beta = 4 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \end{cases}$$

ينتج أن $2\alpha^2 = 8$ و $2\beta^2 = 2$ و $\alpha\beta > 0$

جذرا $3+4i$ هما $z_1 = 2 + i$ و $z_1' = -z_1$

بنفس الطريقة نحسب الجذرين التربيعيين للعدد $3-4i$ و هما $z_2 = 2 + i$ و $z_2' = -z_2$.

ملاحظة : بما أن $\overline{3+4i} = 3-4i$ إذن الجذران التربيعين للعدد $3-4i$ هما مرافقا الجذرين التربيعيين للعدد $3+4i$. (و هما $2+i$ و $-2-i$).

تمرين 2

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z .

(*)......... $z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12=0$ علما أنها تقبل حلا حقيقيا a.

حل

بما أن a حل للمعادلة (*) فإن $a^3-(3+4i)a^2-4(1-3i)a+12=0$.

أي $a^3-3a^2-4a+12+i(-4a^2+12a)=0$

إذن $\begin{cases} a^3-3a^2-4a+12=0 \\ -4a^2+12a=0 \end{cases}$

هذه الجملة تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$ هو 3.

إذن $a=3$ هو الحل الحقيقي للمعادلة (*).

و بالتالي يمكن تحليل العبارة $z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12$ على الشكل

$(z-3)(z^2+pz+q)$ حيث p و q عددان مركبان.

بنشر $(z-3)(z^2+pz+q)$ و مقارنته بالعبارة $z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12$

ينتج أن $\begin{cases} p-3=-3-4i \\ q-3p=-4+12i \\ -3q=12 \end{cases}$ و نجد $p=-4i$ و $q=-4$

إذن المعادلة (*) تكتب على الشكل $(z-3)(z^2-4iz-4)=0$.

لحل المعادلة $z^2-4iz-4=0$ نحسب الجذرين التربيعيين للعدد $\Delta'=-8=8i^2$.

و نجد $2i\sqrt{2}$ ، $-2i\sqrt{2}$ ثم نحسب الحلين z_1 و z_2.

و نجد $z_1=2i+2i\sqrt{2}$

$=2(1+\sqrt{2})i$

$z_2=2i-2i\sqrt{2}$

$=2(1-\sqrt{2})i$

و نستخلص أن للمعادلة $z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12=0$ ثلاثة حلول في $\mathbb{C}$ هي :

$z_0=3$ ؛ $z_1=2(1+\sqrt{2})i$ ؛ $z_2=2(1-\sqrt{2})i$

11 تعيين الكتابة المركبة لتحويل نقطي

تمرين 1

المستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. عبر بالأعداد المركبة عن التحويلات النقطية التالية :

- الانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(2+i)$. • الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(3i)$ ، $B(2-i)$.
- الدوران الذي مركزه $\omega(1-2i)$، و زاويته $\frac{\pi}{4}$. • الدوران الذي مركزه $\omega(1+i)$، و زاويته $\frac{\pi}{2}$.
- التناظر الذي مركزه $\omega(2i)$. • التحاكي الذي مركزه $\omega(2+i)$، و نسبته 3.

حل

- الانسحاب $t_{\vec{v}}$ حيث $\vec{v}(2+i)$ يعبر عنه بالعلاقة $z' = z+2+i$
- الانسحاب $t_{\overrightarrow{AB}}$ حيث $A(3i)$ ، $B(2-i)$ يعبر عنه بالعلاقة $z' = z + z_B - z_A$

$z' = z+2-4i$

- الدوران $r_{(\omega;\frac{\pi}{4})}$ حيث $\omega(1-2i)$ يعبر عنه بالعلاقة $z'-(1-2i) = e^{i\frac{\pi}{4}}(z-(1-2i))$

بعد الإختصار نجد $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)z + 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right)i$

- التناظر S_ω حيث $\omega(2i)$ هو الدوران $r_{(\omega;\theta)}$ (أو التحاكي $h_{(\omega;-1)}$).

إذن $z'-2i = e^{i\pi}(z-2i)$ أي $z' = -z+4i$.

- الدوران $r_{(\omega;\frac{\pi}{2})}$ حيث $\omega(1+i)$ يعبر عنه بالعلاقة $z'-(1+i) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-(1+i))$ أو $z' = iz+2$
- التحاكي $h_{(\omega;3)}$ حيث $\omega(2+i)$ يعبر عنه بالعلاقة $z'-(2+i) = 3(z-(2+i))$ أو $z' = 3z-4-2i$

12 التعرف على تحويل نقطي إنطلاقا من كتابته المركبة

تمرين 2

ميز كل تحويل نقطي للمستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث :

1 • $z' = z+2+4i$ 3 • $z' = -3z-2+4i$

2 • $z' = -iz-2i$ 4 • $z' = -z+2$

حل

1 • لكتابة المركبة للتحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة من $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث

$z' = z+2+4i$ من الشكل $z' = z+b$ حيث $b \in \mathbb{C}$.

إذن هذا التحويل النقطي هو إنسحاب شعاعه $\vec{v}(2+4i)$.

2 • الكتابة المركبة للتحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة من $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث

$z' = -iz - 2i$ من الشكل $z' = az + b$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$ و $|a| = 1$.

إذن هذا التحويل هو دوران زاويته θ حيث $\theta = \frac{3\pi}{2}$ لأن $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$.

مركز هذا الدوران هي النقطة ω لاحقتها $\frac{b}{1-a}$ أي $-1-i$.

و بالتالي التحويل النقطي $M(z) \longmapsto M'(z')$ حيث $z' = -iz - 2i$.

هو الدوران الذي مركزه $\omega(-1-i)$ و زاويته $\frac{3\pi}{2}$.

3 • الكتابة المركبة للتحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث

$z' = -3z - 2 + 4i$ من الشكل $z' = kz + b$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{C}$.

إذن هذا التحويل النقطي تحاك نسبته k حيث $k = -3$.

مركز هذا التحاكي هي النقطة ω التي لاحقتها $\frac{b}{1-a}$ أي $-\frac{1}{2} - i$.

و بالتالي التحويل النقطي $M(z) \longmapsto M'(z')$ حيث $z' = -3z - 2 + 4i$

هو التحاكي الذي مركزه $\omega\left(-\frac{1}{2} - i\right)$ و نسبته -3.

4 • الكتابة المركبة للتحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة من $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث

$z' = -z + 2$ من الشكل $z' = -z + b$ حيث $b \in \mathbb{C}$ هو التناظر الذي مركزه $\omega(z_0)$

حيث $z_0 = -z_0 + 2$ أي $z_0 = 1$.

و بالتالي التحويل النقطي $M(z) \longmapsto M'(z')$ حيث $z' = -z + 2$

هو التناظر الذي مركزه النقطة ω ذات اللاحقة 1.

ملاحظة : التحويل النقطي $M(z) \longmapsto M'(z')$ حيث $z' = -z + 2$

هو أيضا تحاك نسبته 1- و مركزه النقطة ω ذات اللاحقة 1.

كما يعتبر هذا التحويل دورانا مركزه ω ذات اللاحقة 1 و زاويته π.

مسألة 1

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

z عدد مركب يختلف عن $-i$ و Z عدد مركب حيث $Z=\dfrac{z+2i}{1-iz}$.

عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى ثم مثلها بيانيا في كل حالة ممايلي

1 • Z عدد حقيقي.

2 • $-\dfrac{\pi}{2}$ عمدة للعدد Z.

3 • $Z=z$.

4 • النقط $A(i)$ ، $M(z)$ ، $N(Z)$ على استقامة واحدة.

5 • $N(Z)$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $A(i)$ و نصف قطرها $\dfrac{1}{2}$.

حل

1 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون Z حقيقيا.

نكتب Z على الشكل الجبري، نضع $z=x+iy$ ؛

$$Z=\frac{z+2i}{1-iz}=\frac{x+i(y+2)}{1+y-ix}$$

$$=\frac{[x+i(y+2)][1+y+ix]}{(1+y-ix)(1+y+ix)}=\frac{x(1+y)-x(y+2)+i[(y+1)(y+2)+x^2]}{(1+y)^2+x^2}$$

بعد الاختصار نجد $\mathcal{R}e(Z)=\dfrac{-x}{(1+y)^2+x^2}$ و $\mathcal{I}m(Z)=\dfrac{x^2+y^2+3y+2}{(1+y)^2+x^2}$.

Z عدد حقيقي يعني $\mathcal{I}m(Z)=0$ أي أن $x^2+y^2+3y+2=0$ حيث $x\neq 0$ و $y\neq -1$

أو $x^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ حيث $x\neq 0$ و $y\neq -1$.

اذن مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة التي مركزها ω ذات اللاحقة $-\dfrac{3}{2}i$ و نصف قطرها $\dfrac{1}{2}$ باستثناء النقطة C ذات اللاحقة $-i$ (الشكل).

ملاحظة : يمكن الحل بالطريقة التالية : Z عدد حقيقي يعني $Z=\bar{Z}$.

أي $\dfrac{z+2i}{1-iz}=\dfrac{\bar{z}-2i}{1+i\bar{z}}$; $(z\neq -i)$

أو $(z+2i)(1+i\bar{z})=(1-iz)(\bar{z}-2i)$

بعد إجراء الحساب و الاختصار نجد $3(z-\bar{z})+2iz\bar{z}+4i=0$

بوضع $z=x+iy=0$ نجد $x^2+y^2+3y+2=0$

حيث $x\neq 0$ و $y\neq -1$. و هي المجموعة المذكورة آنفا.

2 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون $-\frac{\pi}{2}$ عمدة للعدد Z.

$k \in \mathbb{Z}$ ؛ $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. يعني Z عدد تخيلي صرف و جزؤه التخيلي سالب

أو $k \in \mathbb{Z}$ ؛ $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. يعني $\mathcal{R}e(Z) = 0$ و $\mathcal{I}m(Z) < 0$

لدينا مما سبق $\mathcal{R}e(Z) = \frac{-x}{(1+y)^2 + x^2}$ ؛ $\mathcal{I}m(Z) = \frac{x^2 + y^2 + 3y + 2}{(1+y)^2 + x^2}$.

إذن $k \in \mathbb{Z}$ ؛ $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ يعني $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 + 3y + 2 < 0 \end{cases}$ حيث $(x ; y) \neq (0 ; -1)$.

$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 + 3y + 2 < 0 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x = 0 \\ (y+1)(y+2) < 0 \end{cases}$ أو $x = 0$ و $-2 < y < -1$

اذن المجموعة المطلوبة هي القطعة المستقيمة $[BC]$ باستثناء طرفيها $B(-2i)$ و $C(-i)$.

ملاحظة يمكن استعمال اعتبارات هندسية لتعيين المجموعة المطلوبة.

نكتب Z على الشكل $Z = i\,\frac{z - (-2i)}{z + i}$.

نعتبر النقط $M(z)$ ؛ $B(-2i)$ ؛ $C(-i)$.

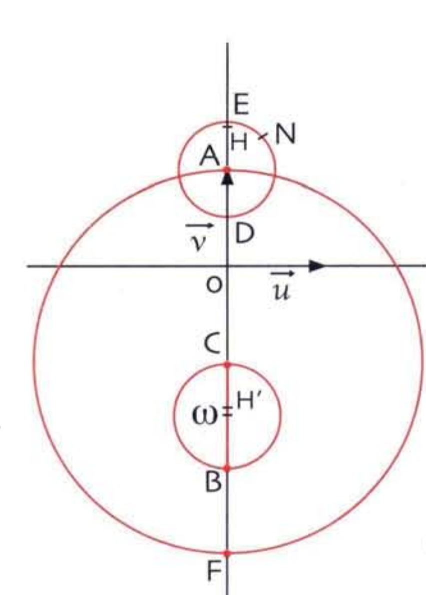
فيكون $\arg Z = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM} ; \overrightarrow{BM}) + k2\pi$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$.

لدينا $\arg z = \frac{-\pi}{2} + k2\pi$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$.

إذن $\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM} ; \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$.

و بالتالي $(\overrightarrow{CM} ; \overrightarrow{BM}) = \pi + k2\pi$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$.

و نحصل على المجموعة المذكورة سابقا و هي القطعة المستقيمة $[BC]$ باستثناء طرفيها $B(-2i)$ و $C(-i)$.



3 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون $Z = z$.

$Z = z$ يعني $\frac{z + 2i}{1 - iz} = z$ ؛ $(z \neq -i)$ أي $(1 - iz)z = z + 2i$.

و بعد الاختصار نحصل على المعادلة $z^2 + 2 = 0$ أو $z^2 = -2$.

هذه المعادلة تقبل حلين هما $z = i\sqrt{2}$ أو $z = -i\sqrt{2}$.

اذن المجموعة المطلوبة متكونة من النقطتين $H(i\sqrt{2})$ ؛ $H'(-i\sqrt{2})$.

4 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون $A(i)$ ، $M(z)$ ، $N(Z)$ على استقامة واحدة

النقط A ، M ، N على استقامة واحدة يعني $\widehat{NAM} = k\pi$.

$\widehat{NAM} = k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}$ يعني $(\overrightarrow{AN} ; \overrightarrow{AM}) = k2\pi$ أو $(\overrightarrow{AN} ; \overrightarrow{AM}) = \pi + k2\pi$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$.

أي أن $\arg\frac{z-i}{Z-i}=k2\pi$ أو $\arg\frac{z-i}{Z-i}=\pi+k2\pi$ ؛ $(k\in\mathbb{Z})$

أي أن $\frac{z-i}{Z-i}\in\mathbb{R}$ و $z\neq i$ و $Z\neq i$

أو أيضا $\mathcal{I}m\left(\frac{z-i}{Z-i}\right)=0$.

لنكتب عبارة $\frac{z-i}{Z-i}$ بشكل بسيط بعد تعويض Z.

$$\frac{z-i}{Z-i}=\frac{z-i}{\frac{z+2i}{1-iz}-1}=\frac{(z-i)(1-iz)}{z+2i-i(1-iz)}=-(z^2+i)$$

إذن $\mathcal{I}m\left(\frac{z-i}{Z-i}\right)=0$ يعني $\mathcal{I}m(-z^2-1)=0$ أو أيضا $\mathcal{I}m(z^2+1)=0$

بوضع $z=x+iy$ يكون $z^2+1=x^2-y^2+1+2ixy$.

إذن $\mathcal{I}m\left(\frac{z-i}{Z-i}\right)=0$ يعني $xy=0$ مع $\left((x;y)\neq(0;1)\right.$ و $\left.(x;y)\neq(0;-1)\right)$

خلاصة : مجموعة النقط M من المستوي التي من أجلها يكون A ، M ، N على استقامة واحدة هي مجموعة نقط محور الفواصل و نقط محور التراتيب باستثناء النقطتين A ، C.

5 • تعيين مجموعة النقط M(z) التي من أجلها تنتمي N(z) إلى الدائرة $\mathscr{C}\left(A;\frac{1}{2}\right)$.

ليكن [DE] قطرا للدائرة التي مركزها $A(i)$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$ حيث $D\left(\frac{i}{2}\right)$ ، $E\left(\frac{2}{3}i\right)$.

من أجل كل نقطة N من هذه الدائرة $\widehat{DNE}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، $(k\in\mathbb{Z})$

هذا يعني $(\overrightarrow{DN};\overrightarrow{EN})=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ أو $(\overrightarrow{DN};\overrightarrow{EN})=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

و لدينا أيضا : $(\overrightarrow{DN};\overrightarrow{EN})=\arg\frac{Z-\frac{3}{2}i}{Z-\frac{1}{2}i}+2k\pi$ مع $Z\neq\frac{3}{2}i$ و $Z\neq\frac{1}{2}i$

لنحسب $\frac{Z-\frac{3}{2}i}{Z-\frac{1}{2}i}$ بدلالة z :

$$\frac{Z-\frac{3}{2}i}{Z-\frac{1}{2}i}=\frac{\frac{z+2i}{z-iz}-\frac{3}{2}i}{\frac{z+2i}{z-iz}-\frac{1}{2}i}=\frac{-z+i}{z+3i}=-\frac{z-i}{z-(-3i)}$$

$$\arg\frac{Z-\frac{3}{2}i}{Z-\frac{1}{2}i}=\arg\left(\frac{z-i}{z-(-3i)}\right)=\arg(-1)+\arg\frac{z-i}{z-(-3i)}=\pi+\arg\frac{z-i}{z-(-3i)}+k2\pi$$

و باعتبار النقط M(z)، A(i)، F(-3i) يكون $(\overrightarrow{DN};\overrightarrow{EN})=\pi+(\overrightarrow{FM};\overrightarrow{AM})+k2\pi$

إذن $\pi+(\overrightarrow{FM};\overrightarrow{AM})+k2\pi=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ أو $\pi+(\overrightarrow{FM};\overrightarrow{AM})=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ ؛ $(k\in\mathbb{Z})$

أي $(\overrightarrow{FM};\overrightarrow{AM})=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ أو $(\overrightarrow{FM};\overrightarrow{AM})=-\frac{\pi}{2}+\pi+k2\pi$.

إذن مجموعة النقط M التي تكون من أجلها N تنتمي إلى الدائرة $\mathscr{C}\left(A;\frac{1}{2}\right)$ هي الدائرة التي قطرها [FA] باستثناء النقطتين F، A. (الشكل).

ملاحظة : يمكن اعتبار العدد $\frac{-z+i}{z+3i}$ $\left(\text{أي } \frac{Z-\frac{3}{2}i}{Z-\frac{1}{2}i}\right)$ تخيليا صرفا، و تعيين مجموعة النقط التي تحقق $\mathcal{R}e\left(\frac{-z+i}{z+3i}\right)=0$، و هي المجموعة المطلوبة.

مسألة 2

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$. K ، L ، M نقط لواحقها على الترتيب

$z_K = 1 + i$ ، $z_L = 1 - i$ ، $z_M = -i\sqrt{3}$

1 • عين N صورة النقطة L بالتحاكي h الذي مركزه M و نسبته 2.

2 • الدوران r الذي مركزه o و زاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول M إلى A و يحول N إلى C
عين اللاحقتين z_A، z_C للنقطتين A ، C.

3 • الانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}$ ذو اللاحقة $2i$ يحول M إلى D و يحول N إلى B.
عين اللاحقتين z_D، z_B للنقطتين D، B على الترتيب.

4 • اثبت أن النقطة K هي مركز تناظر الرباعي ABCD.

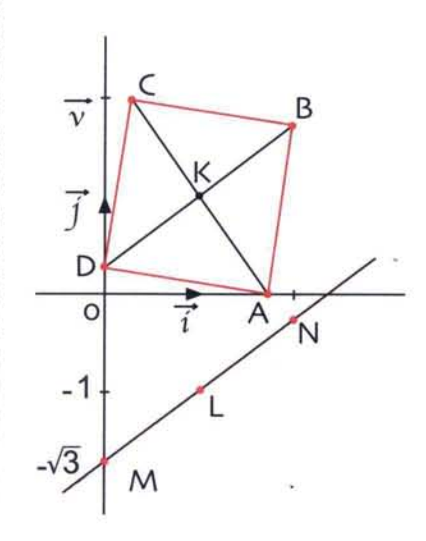
5 • احسب $\frac{z_B - z_K}{z_A - z_K}$، استنتج طبيعة الشكل الرباعي ABCD.

حل

1 • صورة النقطة L (و هي N) بالتحاكي h الذي مركزه M و نسبته 2 تحسب كالتالي :

$z_N - z_M = 2(z_L - z_M)$ أو $z_N = 2z_L - z_M$

بعد تعويض z_L، z_M و التبسيط نجد $z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$.



2 • صورة M (و هي A) بالدوران r الذي مركزه o و زاويته $\frac{\pi}{2}$

تحسب كالتالي : $z_A = e^{i\frac{\pi}{2}} z_M = i z_M$

بعد تعويض z_M نجد $z_A = i(-i\sqrt{3})$ إذن $z_A = \sqrt{3}$.

و بنفس الطريقة نحسب z_C و نجد $z_C = 2 - \sqrt{3} + 2i$.

3 • صورة M (و هي D) بالإنسحاب t الذي شعاعه $\vec{v}(2i)$

تعين كمايلي : $z_D = z_M + 2i$ أي $z_D = (2 - \sqrt{3})i$

و بنفس الطريقة نعين صورة N (و هي B) بالانسحاب t

و نجد $z_B = z_N + 2i$ أي $z_B = 2 + i\sqrt{3}$.

4 • البرهان على أن النقطة K مركز تناظر الرباعي ABCD.

من أجل ذلك نبرهن أن A و C متناظرتان بالنسبة إلى K و كذلك B ، D.

A ، C متناظرتان بالنسبة إلى K يعني K منتصف القطعة المستقيمة [AC].

لاحقة منتصف [AC] هي $\frac{1}{2}(z_A+z_C)$ حيث $\frac{1}{2}(z_A+z_C) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{3} + (2-\sqrt{3}+2i)\right] = 1+i$.

إذن لاحقة منتصف [AC] هي لاحقة K أي K هي منتصف [AC].

لاحقة منتصف [BD] هي $\frac{1}{2}(z_B+z_D)$ حيث

$\frac{1}{2}(z_B+z_D) = \frac{1}{2}\left[2+i\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})i\right] = 1+i$.

إذن لاحقة منتصف [BD] هي لاحقة K أي K هي منتصف [BD] أيضا ، هذا يعني أن قطري الرباعي ABCD لهما نفس المنتصف K، و بالتالي K مركز تناظر ABCD.

5 • حساب $\frac{z_B-z_K}{z_A-z_K}$ لدينا

$$\frac{z_B-z_K}{z_A-z_K} = \frac{(2+i\sqrt{3})-(1+i)}{\sqrt{3}-(1+i)} = \frac{1+i(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)-i}$$

$$= \frac{\left[1+i(\sqrt{3}-1)\right]\left[\sqrt{3}-1+i\right]}{(\sqrt{3}-1-i)(\sqrt{3}-1+i)}$$

و بعد التبسيط و الاختصار نجد $\frac{z_B-z_K}{z_A-z_K} = i$ أو $z_B-z_K = i(z_A-z_K)$

و العبارة الاخيرة هي عبارة الدوران الذي مركزه K و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحول النقطة A إلى النقطة B

اذن KA = KB و $(\overrightarrow{KA}\ ;\ \overrightarrow{KB}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

بما أن قطري الرباعي ABCD متقايسان و متعامدان فإن الرباعي ABCD مربع.

الحساب بالاعداد المركبة

1 z_1 ، z_2 ، z_3 أعداد مركبة حيث

$z_3 = 2 + i$ ؛ $z_1 = -1 + 4i$ ؛ $z_3 = -2 + 3i$

احسب $z_1 + z_2 + z_3$ ؛ $3z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3$

$z_1.z_2$ ؛ $\frac{z_1}{z_2}$ ؛ $\frac{1}{z_3}$ ؛ z_1^2 ؛ $(z_1.z_2)^2$.

2 اثبت أن $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} + \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = 1$

3 حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z

$z - i = 4z + i(z - 2)$

4 احسب i^2 ، i^3 ، i^4 ، i^{1947}.

استنتج حساب i^n تبعا لقيم العدد الطبيعي n.

مرافق عدد مركب

5 عين مرافق كل من

$z_1 = i(3 + 2i)$ ؛ $z_2 = -3i + i(2i - 1)$

$z_3 = \frac{2i - 1}{3 + 2i}$ ؛ $z_4 = (1 - 2i)^{10}$

6 z عدد مركب حيث $z = \frac{3 - 5i}{1 + i}$

• احسب $z + \bar{z}$ و $z - \bar{z}$.

• استنتج $\mathcal{R}e(z)$ ، $\mathcal{I}m(z)$.

7 ميز الأعداد الحقيقية و الأعداد التخيلية الصرفة فيما يلي : $z + \bar{z}$ ؛ $z - \bar{z}$

$iz^2(\bar{z})^2$ ؛ $3 + z^2$ ؛ $2 + z\bar{z}$

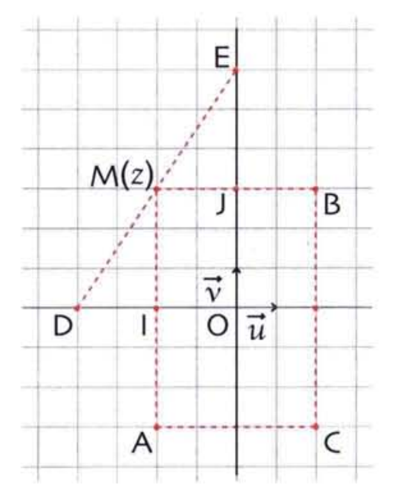
$(z + i\bar{z})(\bar{z} - iz)$ ؛ $(z + i\bar{z})(z - i\bar{z})$

8 z لاحقة النقطة M.

استعمل الشكل التالي لتحديد لاحقة كل نقطة من النقط A ، B ، C ، D ، E ، I ، J من بين الأعداد المركبة التالية :

$-z$ ؛ $\bar{z}$ ؛ $-\bar{z}$ ؛ $z + \bar{z}$ ؛ $z - \bar{z}$

$\frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ؛ $\frac{1}{2}(z - \bar{z})$



كتابة عدد مركب على الشكل الجبري

9 اكتب كل عدد مركب مما يلي على الشكل الجبري. $z_1 = i + (2 + i)$ ؛ $z_2 = (1 + i)(2 - 3i)$

$z_3 = (1 + i)(1 - i)$ ؛ $z_4 = (3 + i)^2$

$z_5 = (2 - 5i)^2$ ؛ $z_6 = (2 + 3i)^2 - (i - 1)^2$

10 نفس السؤال السابق.

$$z_1 = \frac{2 - 5i}{3 + i}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - 2i}$$

$$z_3 = \frac{4 + 3i}{2 - i} + \frac{1 + i}{2 + i}$$

11 x عدد حقيقي و z عدد مركب حيث

$z = x + 2 - i(ix + 3) - 2i + 5ix$

• اكتب بدلالة x الجزء الحقيقي $\mathcal{R}e(z)$ و الجزء التخيلي $\mathcal{I}m(z)$ للعدد z.

• استنتج قيم x التي يكون من أجلها

• z حقيقيا • z تخيليا صرفا.

كتابة عدد مركب على الشكل المثلثي أو على الشكل الأسي

12 عين الطويلة و عمدة لكل عدد مركب مما يلي ثم اكتبه على الشكل المثلثي و على الشكل الأسي.

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z = -2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z = \sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}$$

$$z = -\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}$$

13 نفس السؤال السابق.

$$z = \frac{-1+i}{\sqrt{3}-i} \quad ; \quad z = \frac{\sqrt{3}-2}{1+i\sqrt{3}}$$

$$z = (-1+i)(\sqrt{6}+i\sqrt{2}) \quad ; \quad z = (1+i\sqrt{3})^4$$

$$z = \frac{\sqrt{3}-3i}{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})^3} \quad ; \quad z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}\right)^3$$

14 اكتب كل عدد مركب مما يلي على الشكل المثلثي و على الشكل الأسي.

$$z_2 = 2+2i \quad ; \quad z_1 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$z_4 = \frac{z_2}{z_1} \quad ; \quad z_3 = z_1 \cdot z_2$$

$$z_5 = z_1^3 \cdot z_2^4$$

15 اكتب العدد المركب z حيث $z = \frac{-1+3i\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}$ على الشكل المثلثي.

الطويلة و العمدة

16 z عدد مركب حيث

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

• احسب z^2 ثم اكتبه على الشكل المثلثي.

• استنتج طويلة z و عمدة له.

17 مثل بيانيا في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث.

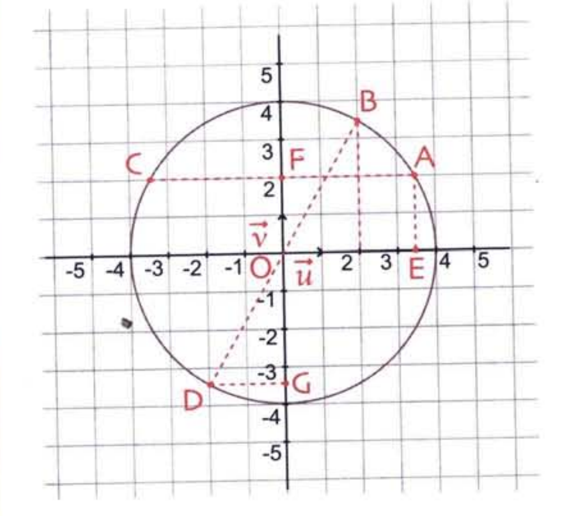
أ) $\arg z = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$

ب) $|z| = 2$

جـ) $|z| = 2$ و $\arg z = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$

18 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

أ) عين الطويلة و عمدة لكل لاحقة من لواحق النقط A ، B ، C ، D ، E ، F ، G الممثلة في الشكل التالي



ب) انشئ في المستوي السابق النقط H ، K ، L ذات اللواحق $4e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $4e^{i\frac{5\pi}{3}}$ ، $4e^{i\frac{7\pi}{6}}$ على الترتيب.

19 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ و A ، B ، M نقط لواحقها على الترتيب 2 ، $3i$ ، z.

• فسر هندسيا كلا من العلاقتين : $\left|\frac{z-3i}{2-3i}\right| = 1$

و $\arg\left(\frac{z-3i}{2-3i}\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$

• انشئ الشكل المناسب لمجموعة النقط $M(z)$.

الاعداد المركبة و الهندسة

بالنسبة للتمارين من 20 إلى 24 نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

20 نعتبر النقطة M ذات اللاحقة z.
عين في كل حالة مجموعة النقط $M(z)$ حيث

أ) $|4iz + 12| = 4|z + 1 - i|$

ب) $|iz - 3| = |z + i|$

جـ) $|z + 5i| = 3$

د) $|iz - 3| = 4$

هـ) $|\bar{z} + 2 - i| = 2$

و) $|iz + 3| = |z + 2i|$

21 نفس السؤال السابق.

أ) $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

ب) $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

جـ) $\arg(z) = k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

د) $\arg(z) = k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

22 نفس السؤال السابق

أ) $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

ب) $\arg(z + 1) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

جـ) $\arg(z - i) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

23 نفس السؤال السابق.

أ) $\arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

ب) $\arg(iz) = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

جـ) $\arg(-z) = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

24 عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون

أ) $\frac{z - 1}{z + 2i}$ حقيقيا.

ب) $\frac{z - 1}{z + 2i}$ تخيليا صرفا.

جـ) $\arg \frac{z - 1}{z + 2i} = k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

د) $\arg \frac{z - 1}{z + 2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

25 المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u}, \vec{v})$، أنشئ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث

أ) $\mathcal{R}e(z^2) = 0$.

ب) $\mathcal{I}m(z^2) = 1$.

جـ) $\mathcal{R}e(z^2) = 0$ و $\mathcal{I}m(z^2) = 1$.

26 المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالتين التاليتين

أ) $(\bar{z} - 1)(z + 2)$ عدد حقيقي.

ب) العدد $\frac{z - 2i}{z + 4i}$ حيث $z \neq -4i$ حقيقي.

27 نفس السؤال السابق.

أ) العدد $\frac{2 + \bar{z}}{1 + \bar{z}}$ حيث $z \neq -1$ حقيقي.

ب) العدد $\frac{2 + \bar{z}}{1 + \bar{z}}$ حيث $z \neq -1$ تخيلي صرف.

28 A، B، C نقط لاحقاتها على الترتيب

$z_A = -1 - i$ ، $z_B = 2 - i$ ، $z_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

1 . احسب قيسا للزاوية $(\overline{CB} ; \overline{CA})$.

2 . استنتج أن المستقيمين (CA)، (CB) متعامدان.

29 نفس السؤال من أجل (AC) و (AB) حيث

$z_A = 1 - i$ ، $z_B = 4 - 5i$ ، $z_C = 5 + 2i$.

30 A ، B ، C نقط لاحقاتها على الترتيب

$z_A = -\frac{1}{3} + 2i$ ، $z_B = 1 - 2i$ ، $z_C = \frac{7}{3} - 6i$.

1 • احسب قيسا للزاوية $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$.

2 • استنتج أن المستقيمين (AB)، (AC) متوازيان.

دستور موافر و ترميز أولير

31 • احسب بطريقتين مختلفتين العدد

$(\cos x + i \sin x)^2$.

• استنتج $\cos 2x$ و $\sin 2x$

بدلالة $\sin x$ و $\cos x$.

32 • احسب بطريقتين مختلفتين العدد

$(\cos x + i \sin x)^3$.

• استنتج $\cos 3x$ و $\sin 3x$

بدلالة $\sin x$ و $\cos x$.

• احسب $\cos 3x$ بدلالة $\cos x$.

33 عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $(1 + i\sqrt{3})^n$ • حقيقيا • تخيليا صرفا.

34 • اكتب على الشكل الخطي العددين

$\cos^3 x$ ، $\sin^3 x$.

• استنتج الكتابة الخطية للعدد $\sin^3 \frac{x}{3}$ و $\cos^3 \frac{x}{3}$.

حل معادلات من الدرجة الثانية

35 حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$

المعادلة ذات المجهول z التالية

$$z^2 - (2 - i)z + 3 - i = 0$$

36 أ) عين العددين الحقيقيين α ، β حيث

$$(\alpha - i\beta) = -3 + 4i$$

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$2z^2 - 2(2 - i)z + 3 - 4i = 0$$

جـ) لتكن المعادلة ذات المجهول z في $\mathbb{C}$

$$2z^3 - 2(3 - i)z^2 + (7 - 6i)z - 3 + 4i = 0$$

أوجد الحل الحقيقي لهذه المعادلة ثم الحلين الآخرين.

37 حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة

$$z^4 + 8iz^2 + 48 = 0$$

التحويلات النقطية و الأعداد المركبة

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس.

38 A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب

$2 - 4i$ و $-1 - i$.

أ) عين لاحقة النقطة C صورة A بالتحاكي الذي مركزه B و نسبته -2.

ب) عين لاحقة النقطة D صورة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

جـ) عين لاحقة النقطة E صورة B بالأنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

د) عين معاملات للنقط A، B، C حتى يكون مرجحها النقطة O.

39 ميز في كل حالة مما يلي التحويل النقطي الذي يحول كل نقطة M(z) إلى النقطة M'(z') حيث

أ) $z' = iz + 3 - i$

ب) $z' = 2z - 3i$

جـ) $z' = z + 1 + i$

د) $z' = -z + i$

40 عين طبيعة التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M(z) النقطة M'(z') حيث

$$z' = \frac{\sqrt{3} + i}{2i} z + \sqrt{3} - i$$

مسائل

41 المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u} , \vec{v})$، (الوحدة هي 2cm).

نعتبر النقطتين A ، C ذوي اللاحقتين على الترتيب

$z_1 = \sqrt{2}(1 + i)$ ، $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

1 • عين الطويلة و عمدة لكل من z_1 ، z_3.

2 • انشئ النقطتين A و C.

3 • احسب $\frac{z_3}{z_1}$ ثم استنتج قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OC})$.

4 • عين اللاحقة z_2 للنقطة B بحيث يكون الرباعي OABC مستطيلا. أرسم هذا المستطيل.

42 المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u} , \vec{v})$. A ، B ، C نقط لاحقاتها على الترتيب $z_1 = \sqrt{3} + i$ ، $z_2 = -1 - i$ ،

$z_3 = 1 - (2 + \sqrt{3})i$

1 • أ) احسب الطويلة و عمدة للعدد المركب

$$z = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$$

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC.

2 • أ) اكتب على الشكل الجبري العدد $\frac{z_1}{z_2}$.

ب) اكتب z_1 ، z_2 على الشكل المثلثي.

ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد $\frac{z_1}{z_2}$.

جـ) استنتج من السؤال (2) القيمة المضبوطة لكل من للعددين $\sin \frac{\pi}{12}$ ، $\cos \frac{\pi}{12}$.

43 1 • حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث $z^2 - 2iz - 2 = 0$

2 • K ، L ، M نقط لاحقاتها على الترتيب

$z_K = 1 + i$ ، $z_L = -1 + i$ ، $z_M = -\sqrt{3}$

• انشئ هذه النقط في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u} , \vec{v})$، (الوحدة هي 4cm).

3 • أ) نسمي N نظيرة النقطة M بالنسبة إلى L. عين لاحقة N.

ب) لتكن A صورة M و C صورة N بالدوران الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

عين اللاحقتين z_A ، z_C للنقطتين A و C.

جـ) لتكن D صورة M و B صورة N بالانسحاب الذي شعاعه $(2)\vec{u}$.

عين اللاحقتين z_D ، z_B للنقطتين D ، B.

4 • أ) عين منتصف كل من القطعتين [DB] ، [AC].

ب) احسب العدد $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K}$.

جـ) استنتج طبيعة الرباعي ABCD.

44 ليكن T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M(z) من المستوي تختلف عن A(-3i) و النقطة M′(z′) حيث $z' = -\frac{3iz + 7}{z + 3i}$

1 • برهن أن التحويل T يقبل نقطتين صامدتين B ، C يطلب اعطاء لاحقة كل منهما.

2 • نسمي (४) الدائرة ذات القطر [BC].

لتكن M نقطة من (४) تختلف عن B و C و M′ صورتها بالتحويل T.

أ) تحقق أن لاحقة النقطة M تحقق $z = -3i + 4e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي.

ب) عبر عن اللاحقة z' للنقطة M′ بدلالة θ. استنتج أن M′ تنتمي إلى (४).

جـ) برهن أن $z' = -\bar{z}$ ثم استنتج انشاء هندسيا للنقطة M′.

الاعداد المركبة

1 $z_1 + z_2 + z_3 = -1 + 8i$

$z_1.z_2 = -6 + 7i$ ؛ $3z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3 = 9 - \frac{7}{2}i$

$\frac{1}{z_3} = -\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$ ؛ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{17} - \frac{9}{17}i$

$(z_1.z_2)^2 = -13 - 84i$ ؛ $z_1^2 = 3 + 4i$

2 $\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} + \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{(\sqrt{3} - i)^2 + (\sqrt{3} + i)^2}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)} = 1$

3 $z = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$

4 $i^{1947} = -i$ ؛ $i^4 = 1$ ؛ $i^3 = -i$ ؛ $i^2 = -1$

5 $\bar{z}_2 = 3i + i(2 + 1)$ ؛ $\bar{z}_1 = -i(3 - 2i)$

$\bar{z}_4 = (1 + 2i)^{10}$ ؛ $\bar{z}_3 = \frac{-2i - 1}{3 - 2i}$

6 $z = \frac{3 - 5i}{1 + i}$

$z - \bar{z} = -8i$ ؛ $z + \bar{z} = -2$

$\mathcal{I}m(z) = -8$ ؛ $\mathcal{R}e(z) = -2$

7 الأعداد الحقيقية هي $z + \bar{z}$ ؛ $2 + z\bar{z}$

$(z + i\bar{z})(z - i\bar{z})$ ؛ $(z + i\bar{z})(\bar{z} - iz)$

الأعداد التخيلية الصرفة هي $z + \bar{z}$ ؛ $2 + z\bar{z}$

$iz^2(\bar{z})^2$ ؛ (لأن $iz^2(\bar{z})^2 = i(z\bar{z})^2$)

8 $C(-z)$ نظيرة $M(z)$ بالنسبة إلى O

$A(\bar{z})$ نظيرة $M(z)$ بالنسبة إلى $(O ; \vec{u})$

$B(-\bar{z})$ نظيرة $M(z)$ بالنسبة إلى $(O ; \vec{v})$

$D(z + \bar{z})$ $(z + \bar{z} = 2\mathcal{R}e(z))$

$E(z - \bar{z})$ $(z - \bar{z} = 2i\mathcal{I}m(z))$

$I\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right)$ ؛ $J\left(\frac{1}{2}(z - \bar{z})\right)$

9 $z_1 = 2 + 2i$ ؛ $z_2 = 5 - i$

$z_3 = 2$ ؛ $z_4 = 8 + 6i$

$z_5 = -21 - 20i$ ؛ $z_6 = -5 + 14i$

10 $z_1 = \frac{1}{10} - \frac{17}{10}i$ ؛ $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_3 = \frac{8}{5} + \frac{11}{5}i$

11 $z = 2x + 2 + (-5 + 5x)i$

$\mathcal{R}e(z) = 2x + 2$ ؛ $\mathcal{I}m(z) = 5x - 5$

z حقيقي من أجل $x = 1$.

z تخيلي صرف من أجل $x = -1$.

12 ملاحظة : ترتيب الإجابات يتبع ترتيب الأسئلة

$\|z\|$	$\arg z$	الشكل المثلثي للعدد z	الشكل الأسي
2	$-\frac{\pi}{12}$	$2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$	$2e^{-i\frac{\pi}{12}}$
2	$\frac{13\pi}{12}$	$2\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$	$2e^{i\frac{13\pi}{12}}$
1	$\frac{5\pi}{12}$	$\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$	$e^{i\frac{5\pi}{12}}$
1	$\frac{7\pi}{12}$	$\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$	$e^{i\frac{7\pi}{12}}$

13 ملاحظة : ترتيب الاجابات يتبع ترتيب الاسئلة من اليمين إلى اليسار.

$\|z\|$	$\arg z$	الشكل المثلثي للعدد z	الشكل الأسي
$1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$
16	$\frac{4\pi}{3}$	$16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$	$16e^{i\frac{4\pi}{3}}$
4	$\frac{11\pi}{12}$	$4\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$	$4e^{i\frac{11\pi}{12}}$
1	$\frac{3\pi}{2}$	$\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$	$e^{i\frac{3\pi}{2}}$
$\frac{\sqrt{6}}{16}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{6}}{16}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{6}}{16}e^{i\frac{\pi}{6}}$

14 ملاحظة : ترتيب الإجابات يتبع ترتيب الأسئلة من اليمين إلى اليسار.

العدد	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
z_1	$2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$	$2e^{-i\frac{\pi}{3}}$
z_2	$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	$2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$
z_3	$4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$	$4\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{12}}$
z_4	$\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$	$\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$
z_5	$512(\cos 0 + i\sin 0)$	$512e^{i0}$

15 يكتب z على الشكل $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

و منه نجد الشكلين المثلثي $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

و الأسي $e^{i\frac{2\pi}{3}}$

16 لدينا $z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ و منه الشكل المثلثي $z^2 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

نستنتج أن $|z| = 2$ ؛ $\arg(z) = -\frac{\pi}{8}$

17 أ) • مجموعة النقط $M(z)$

حيث $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ هي مجموعة النقط M

حيث $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

أي نصف المستقيم

$[OA)$ حيث $A(1+i)$.

ب) • مجموعة النقط $M(z)$

حيث $|z| = 2$ هي الدائرة

التي مركزها O و نصف قطرها 2.

جـ) • مجموعة النقط $M(z)$ حيث

$|z| = 2$ و $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

هي تقاطع المجموعتين السابقتين أي هي النقطة $M_0(\sqrt{2}\,;\sqrt{2})$.

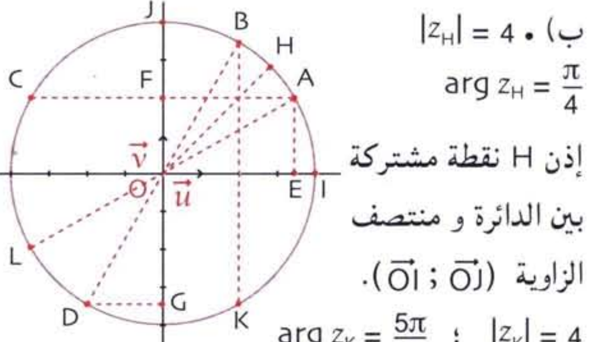
18 أ) •

$|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = |z_E| = |z_F| = |z_G| = 4$

$\arg z_A = \frac{\pi}{6}$ (مسقط A على (OJ) هو منتصف [OJ])

$\arg z_B = \frac{\pi}{3}$ ؛ $\arg z_C = \pi - \frac{\pi}{6}$ ؛ $\arg z_E = 0$

$\arg z_D = \pi + \frac{\pi}{2}$ ؛ $\arg z_F = \frac{\pi}{2}$ ؛ $\arg z_G = -\frac{\pi}{2}$



ب) • $|z_H| = 4$

$\arg z_H = \frac{\pi}{4}$

إذن H نقطة مشتركة بين الدائرة و منتصف الزاوية $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OJ})$.

$|z_K| = 4$ ؛ $\arg z_K = \frac{5\pi}{3}$

إذن H هي نظيرة B بالنسبة إلى (OI).

$|z_L| = 4$ ؛ $\arg z_L = \frac{7\pi}{6}$

إذن L هي نظيرة A بالنسبة إلى O.

19 •

$\left|\frac{z - 3i}{2 - 3i}\right| = \frac{BM}{BA}$

$\frac{BM}{BA} = 1$

يعني $BM = BA$.

مجموعة النقط M

هي دائرة مركزها B و نصف قطرها BA $(BM = \sqrt{13})$

• $\arg\left(\frac{z - 3i}{2 - 3i}\right) = (\overrightarrow{BM} ; \overrightarrow{BA})$

مجموعة النقط M حيث $(\overrightarrow{BM} ; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

هو نصف المستقيم (Δ) العمودي على (AB)

في B (باستثناء B) و المحتوي في نصف المستوي

المحدود بالمستقيم (OB) و الذي لا يشمل النقطة A.

20 • مجموعة النقط $M(x ; y)$ هي :

أ) • المستقيم Δ_1 : $2x + 4y - 7 = 0$

ب) • المستقيم Δ_2 : $y = -2$

جـ) • الدائرة (C_1) : $x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0$

مركزها $\omega(0 ; -5)$ و نصف قطرها 3.

د) • الدائرة (C_2) : $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$

مركزها $\omega(0 ; -3)$ و نصف قطرها 4.

هـ) • الدائرة (C_3) : $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

مركزها $\omega(-2 ; -1)$ و نصف قطرها 2.

و) • المستقيم Δ_3 : $y = \frac{1}{2}$

21 • مجموعة النقط M هي :

أ) • نقط محور التراتيب ذات التراتيب الموجبة تماما.

ب) • نقط محور التراتيب باستثناء المبدإ.

جـ) • نقط محور الفواصل ذات الفواصل الموجبة تماما.

د) • نقط محور الفواصل باستثناء المبدأ.

22 • بالرجوع إلى تعريف عمدة عدد مركب

أ) • $(\vec{i} ; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ مجموعة النقط M

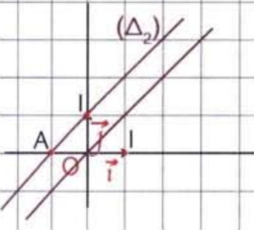
هي منصف $(\vec{i} ; \vec{j})$ باستثناء المبدأ O.

ب) • لتكن $A(-1)$ إذن $\overrightarrow{AM}(z + 1)$

$\arg(z + 1) = (\vec{i} ; \overrightarrow{OM})$ مجموعة النقط M

هي نصف المستقيم (Δ_2) طرفه A (باستثناء A)

و يشمل $J(0 ; 1)$.



جـ) • لدينا $\overrightarrow{JM}(z - 1)$

$\arg(z - 1) = (\vec{i} ; \overrightarrow{JM})$

أي $(\vec{i} ; \overrightarrow{JM}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

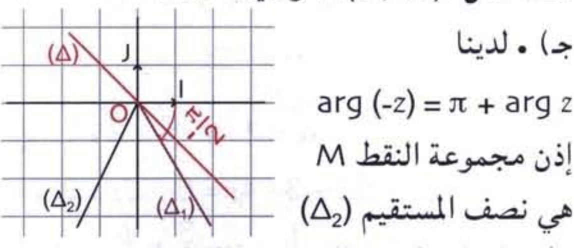
مجموعة النقط M

هي نصف المستقيم (Δ_3) طرفه J

(باستثناء J) و محمول على (Δ_2).

23 أ) • لدينا $\arg \bar{z} = -\arg z$ إذن مجموعة النقط M هي المنصف الثاني (Δ) باستثناء O.

ب) • $\arg (iz) = \frac{\pi}{2} + \arg z$ إذن $\arg z = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ مجموعة النقط M هي نصف المستقيم (Δ_1) طرفه O (باستثناء O) و يشمل نقطة مثل $A(1 ; \sqrt{3})$ و ميله $-\sqrt{3}$.



جـ) • لدينا

$\arg (-z) = \pi + \arg z$

إذن مجموعة النقط M هي نصف المستقيم (Δ_2) نظير (Δ_1) بالنسبة إلى محور التراتيب.

24 نسمي $\mathcal{R}e(z)$ و $\mathcal{I}m(z)$ الجزئين الحقيقي و التخيلي للعدد $Z = \frac{z - 1}{z + 2i}$.

Z حقيقي يعني $\mathcal{I}m(Z) = \frac{-2x + y + 2}{x^2 + (y+2)^2} = 0$

مجموعة النقط $M(z)$ في هذه الحالة هي المستقيم $\Delta : 2x - y - 2 = 0$ باستثناء النقطة $A(0 ; -2)$.

ب) • Z تخيلي صرف يعني

$$\mathcal{R}e(Z) = \frac{x^2 + y^2 - x + 2y}{x^2 + (y+2)^2} = 0$$

مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة (C) التي مركزها $A\left(\frac{1}{2} ; -1\right)$ و تشمل المبدأ باستثناء A.

جـ) • نعتبر النقطتين $I(1)$ ، $A(-2)$.

مجموعة النقط M تحقق

$(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{IM}) = 4\pi$

و هي المستقيم (Δ) باستثناء [AI].

د) • مجموعة النقط M تحقق

$(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{IM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

و هي الدائرة (C) باستثناء A و I.

25 أ) • مجموعة النقط M تحقق المعادلة $x^2 - y^2 = 0$ (اتحاد المنصفين الأول و الثاني)

ب) • مجموعة النقط M تحقق $y = \frac{1}{2x}$ (قطع زائد).

جـ) • مجموعة النقط M تحقق $x^2 - y^2 = 1$ (قطع زائد).

26 أ) • مجموعة النقط M تحقق المعادلة $x^2 + y^2 + x - 2 = 0$ و هي الدائرة التي مركزها $\omega\left(-\frac{1}{2} ; 0\right)$ و نصف قطرها $\frac{3}{2}$.

ب) • مجموعة النقط M تحقق $\frac{x^2 + y^2 + 2y - 8}{x^2 + (y+4)^2}$

و هي الدائرة التي مركزها $\omega(0;-1)$ و نصف قطرها 3 باستثناء $A(0;-4)$.

27 أ) • مجموعة النقط M تحقق المعادلة $y = 0$ مع $(x ; y) \neq (-1;0)$ و هي محور الفواصل باستثناء $A(-1;0)$.

ب) • مجموعة النقط M تحقق $x^2 + y^2 + 3x + 2 = 0$ مع $(x ; y) \neq (-1;0)$ و هي الدائرة التي مركزها $\omega\left(-\frac{3}{2} ; 0\right)$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$ باستثناء A

28 1 • $(\widehat{\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB}}) = \arg \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\pi}{2}$

2 • نستنتج أن (CA) ، (CB) متعامدان.

29 $(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}}) = \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\pi}{2}$

و بالتالي (AB) ، (AC) متعامدان.

30 1 • $(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}}) = \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 0$

2 • و بالتالي (AB) ، (AC) متوازيان.

31 $(\cos x + i\sin x)^2 = \cos 2x + i\sin 2x$

(حسب قانون مواقر)

$(\cos x + i\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i\sin x\cos x$

(حسب ثنائي الحد لنيوتن)

نستنتج أن $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

32 • $(\cos x + i\sin x)^3 = \cos 3x + i\sin 3x$

$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$
$+ i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)$

• نستنتج أن $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$

$\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$

• لدينا $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

إذن نكتب أيضا $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

33 • لدينا $(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n\left(\cos n\frac{\pi}{3} + i\sin n\frac{\pi}{3}\right)$

$(1 + i\sqrt{3})^n$ عدد حقيقي يعني $\sin n\frac{\pi}{3} = 0$

إذن n مضاعف 3.

$(1 + i\sqrt{3})^n$ تخيي صرف يعني $\cos n\frac{\pi}{3} = 0$

و هذه المعادلة ليس لها حل في مجموعة الاعداد الطبيعية و بالتالي مجموعة الحلول خالية.

34 • لدينا $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$\cos^3 x = \left[\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right]^3 = \dfrac{1}{8}\left[e^{i3x} + e^{-i3x} + 3(e^{ix} + e^{-ix})\right]$

إذن $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$

$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ ؛ $\sin^3 x = \left[\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right]^3$

$\sin^3 x = \dfrac{1}{8i}\left[e^{i3x} - e^{-i3x} - 3(e^{ix} - e^{-ix})\right]$

إذن $\sin^3 x = -\dfrac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x)$

• نستنتج الكتابة الخطية للعددين $\cos^3\frac{x}{3}$ ، $\sin^3\frac{x}{3}$

$$\cos^3\frac{x}{3} = \frac{1}{4}\left(\cos x + 3\cos\frac{x}{3}\right)$$

$$\sin^3\frac{x}{3} = -\frac{1}{4}\left(\sin x - 3\sin\frac{x}{3}\right)$$

35 $\Delta = (2 - i)^2 - 4(3 - i) = -9$

للمعادلة $z^2 - (2 - i)z + 3 - i = 0$ حلان هما

$z = 1 - i$ أو $z = 1 - 2i$

36 أ) • $\alpha = 1$ و $\beta = 2$

ب) • للمعادلة $2z^2 - 2(2 - i)z + 3 - 4i = 0$

حلان هما $z = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$ أو $z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

جـ) • إذا كان α حلا حقيقيا للمعادلة

$(*)... 2z^3 - 2(3 - i)z^2 + (7 - 6i)z - 3 + 4i = 0$ ...(*)

فإن α تحققها.

و نجد بعد تعويض z بالعدد α و الإختصار الجملة

$$\begin{cases} 2\alpha^3 - 6\alpha^2 + 7\alpha - 3 = 0 \\ \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \end{cases}$$

$\alpha = 1$ يحقق هذه الجملة و هو الحل الحقيقي.

$(z - 1)(2z^2 - 2(2 - i)z + 3 - 4i) =$

$2z^3 - 2(3 - i)z^2 + (7 - 6i)z - 3 + 4i$

إذن الحلان الآخران للمعادلة (*) هما حلا المعادلة الواردة في أ).

37 نضع $z^2 = t$ إذن $t^2 + 8it + 48 = 0$

نجد $t = z^2 = i$ أو $t = z^2 = -12i$

و نجد $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{6}$ أو $z_2 = -z_1$

$z_3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ أو $z_4 = -z_3$

38 أ) • $z_C = kz_A + (1 - k)z_B$ ؛ $z_C = -7 - i$

ب) • $z_D = e^{i\theta}z_B + (1 - e^{i\theta})z_A$ ؛ $z_D = 5 - i$

جـ) • $z_E = z_B + z_{\overrightarrow{AB}}$ ؛ $z_E = -4 - 2i$

د) • O مرجح النقط A، B، C المرفقة على الترتيب بالمعاملات α، β، ɣ.

$\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C$ ، $\begin{cases} 2\alpha - \beta - 7\gamma = 0 \\ 4\alpha + \beta - 5\gamma = 0 \end{cases}$

باعتبار ɣ وسيطا و حل الجملة السابقة

نجد $\alpha = 2\gamma$ ، $\beta = -3\gamma$ ، $\gamma \neq 0$

باختيار ɣ مثلا $\gamma = 1$ نجد $(\alpha ، \beta ، \gamma) = (2 ، -3 ، 1)$

39 أ) • التحويل دوران $R\left(\omega ; \frac{\pi}{2}\right)$ ؛ $\omega(2 + i)$

ب) • التحويل تحاك $H(\omega ; 2)$ ؛ $\omega(3i)$

جـ) • التحويل انسحاب $T_{\vec{v}}$ ؛ $\vec{v}(1 + i)$

د) • التحويل تناظر مركزي S_ω ؛ $\omega\left(\frac{i}{2}\right)$

40 التحويل دوران $R\left(\omega ; -\frac{\pi}{3}\right)$ ؛ $\omega(-2i)$

41 1 • $|z_1| = 2$ ؛ $\arg z_1 = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

$|z_3| = 1$ ؛ $\arg z_3 = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$

2 • اعتمادا على طويلة z_1 و عمدة له $\frac{\pi}{4}$ ننشئ النقطة A. و بالمثل بالنسبة إلى النقطة C.

3 • $\frac{z_3}{z_1} = -\frac{i}{2}$ و منه $(\widehat{\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OC}}) = \arg \frac{z_3}{z_1} = -\frac{\pi}{2}$

4 • OABC مستطيل يعني أن القطرين [OB]، [AC] متناصفان أي $\frac{1}{2} z_2 = \frac{1}{2}(z_1 + z_3)$

و منه $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(3 + i)$.

42 1 • أ) • $|z| = 1$ ، $\arg z = -\frac{\pi}{2}$

ب) • $\frac{BC}{BA} = 1$ و $(\widehat{\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}}) = -\frac{\pi}{2}$

نستنتج أن المثلث ABC قائم في B و متساوي الساقين.

2 • أ) • $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{i(-1 + \sqrt{3})}{2}$

ب) • $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right)$

جـ) • $\frac{z_1}{z_2} = -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} + i\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12}$

$= -\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{i(-1 + \sqrt{3})}{2}$

إذن $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ و $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

43 1 • $z = 1 + i$ أو $z = -1 + i$

2 • تنشأ النقط k، L، M اعتمادا على المعطيات.

3 • أ) $z_N = -2 + \sqrt{3} + 2i$

ب) $z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_M = \sqrt{3}\, i$

$z_C = e^{i\frac{\pi}{2}} z_N = 2 - (\sqrt{3} - 2)i$

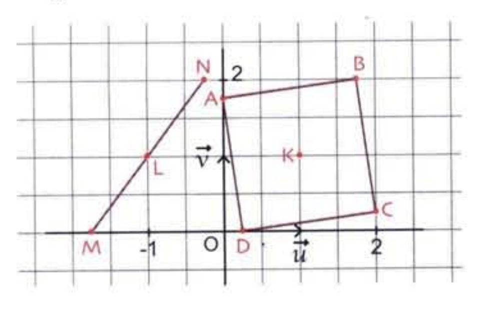
جـ) $z_D = z_M + 2 = -\sqrt{3} + 2$

$z_B = z_N + 2 = \sqrt{3} + 2i$

4 • أ) لاحقة منتصف [DB] هي $\frac{1}{2}(z_D + z_B) = 1 + i$

أي لاحقة منتصف [AC] هي $\frac{1}{2}(z_A + z_C) = 1 + i$

أي K و منه [DB] و [AC] متناصفان في K.



ب) • $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = \frac{1}{i}$

جـ) • $\left|\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K}\right| = 1$ أي $KC = KB$.

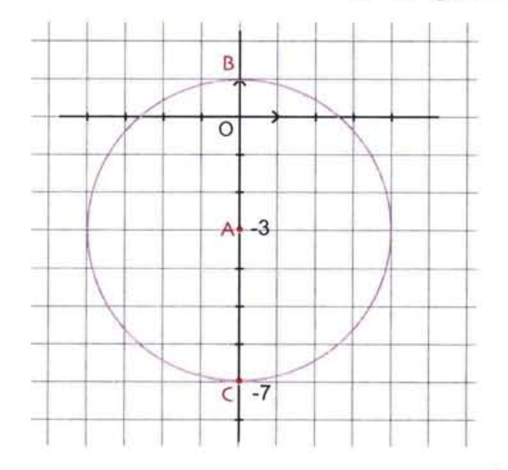
$\arg \frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = -\frac{\pi}{2}$ أي $(KC) \perp (KB)$

إذن ABCD مربع.

44 1 • المعادلة $z' = -\frac{3iz + 7}{z + 3i}$

أي $z^2 + 6iz + 7 = 0$

تقبل حلين $z_B = i$ و $z_C = -7i$ و منه النقطتان الصامدتان B، C.



1 • أ) • A منتصف [BC]

γ الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 4 باستثناء C، B .

لدينا $|z - z_A| = 4$ و $z - z_A = 4e^{i\theta}$

إذن $z = -3i + 4e^{i\theta}$ (θ عدد حقيقي).

ب) • $z' = -3i - 4e^{-i\theta}$ و منه $|z' + 3i| = 4$

أو $AM' = 4$ نستنتج أن $M' \in (\gamma)$

جـ) • $z' = -3i - 4e^{-i\theta}$ يعني $z' = -\bar{z}$

نستنتج أن M' هي نظيرة M بالنسبة إلى محور التراتيب، و منه إنشاء M'.